50 Šachových a Matematických Úloh pre Školy

Prístup k riešeniu problémov založený na (šachových) hrách

Erasmus+ Contract No. 2017-1-SK01-KA201-035424
with EU financial support.

Erasmus+

IO1

ÚVOD

Táto kniha poskytuje materiály pre veľmi vyhľadávané spojenie medzi šachom a matematikou pre triedy. Všetky úlohy sme kompletne vyskúšali a zistili, že väčšina detí je z nich nadšená - často dokonca viac ako ich učitelia! Šach je tradičná stolová hra, ktorú majú deti radi na všetkých úrovniach. Aby sme priniesli a prenikli do podstaty matematiky konzistentnej s učebnými osnovami základných škôl (t.j. deti od 6-11) vo väčšine krajín, používame šachovnicu a šachové figúrky. Vyžaduje sa iba základná úroveň znalostí šachu - ako sa figúrky pohybujú. Pre používanie tejto knihy nie je nutné byť šachovým hráčom. Hlavné zameranie je na riešenie problémov.

50 úloh je rozdelených podľa veku a prirodzeného utvárania skupín - jednotlivci, páry, skupiny štyroch (2 páry), skupiny alebo celá trieda. Súvisiaca téma v matematických osnovách je tiež zobrazená. Väčšina úloh má prípravné otázky alebo rozšírenia. Riešenie úloh by normálne nemalo trvať dlhšie ako jednu vyučovaciu hodinu. Potrebné materiály sú minimálne. Použité môžu byť šachové sady, ale úlohy fungujú rovnako dobre aj pri použití mriežok 8x8 a farebných žetónov alebo značiek. Výtlačky pozícií na šachovnici sú užitočné pri niekoľkých úlohách.

Postupne prejdite knihu podľa tempa detí. Niektoré deti budú vysoko prevyšovať uvedené vekové rozpätie. Riešenie problémov vyžaduje vytrvalosť. Od detí sa žiada by splnili úlohu alebo vykonali skúmanie alebo hrali hru. Na prekonanie intelektuálnych prekážok sú často poskytnuté pomôcky. Pre každý problém je poskytnutá metóda riešenia, ale vždy existuje viac ako jedna metóda riešenia - a deti by mali byť podporené, aby premýšľali samostatne. Učiteľ môže vypracovať vlastné prípravné otázky alebo rozširujúce úlohy, aby vyhoveli schopnostiam detí. Neskoršie úlohy vyžadujú vyššiu úroveň abstrakcie a riešenia majú tendenciu byť chybné, takže vyžadujú viac zásahu zo strany učiteľa.

Matematické úlohy sú jednoduché a nenáročné na hranie. Názorne demonštrujú niektoré základné koncepty ako sú parita a symetria. Zmyslom týchto hier nie je vyhrať ale pochopiť základné koncepty. Deti sú fascinované zistením, že veľa z týchto hier môžu vyhrať ak si uvedomia, že existuje základný vzor. Toto je súčasťou poznania, že matematika poskytuje základné vzory vedeckým zákonom. Z didaktickej perspektívy sú deti nadšené, keď sa môžu naučiť „triky“ ako vyhrať hru alebo vyriešiť hlavolam.

Tieto úlohy sú vytvorené z bežných zdrojov a doplnené niektorými novými úlohami od autorov. Mnoho úloh bude nových pre rekreačných matematikov. To, čo ich robí špecifickými je, že sú vytvorené v obmedzenom prostredí šachovnice, aby vytvorili pocit dôvernosti, rovnako ako prístupnosti.

Učebné osnovy základných škôl sú zo Singapuru, pretože sú považované za blízke metodológii riešenia problémov podporované týmto projektom. Singapurská „metóda“ získala širokú medzinárodnú pozornosť po úspechu v OECD Pisa hodnotení. Ako potvrdili odborníci na vzdelanie pracujúci na projekte, učebné osnovy základných škôl sa zhodujú s tými Európskymi. Okrem matematiky, veľa z týchto úloh zahŕňa niektoré princípy Teórie hry, ktorá hoci nie je bežne vyučovaná na základných školách, väčšina detí je schopná zvládnuť ju.

Možno najväčší prínos pri práci s týmito úlohami je potreba vytvárať štruktúru problémov. Dobre zostavený problém je radosť riešiť. Učitelia sú podporovaný, aby rozvíjali a rozširovali tieto úlohy a delili sa o svoje skúsenosti v triede.

Tento projekt bol financovaný Európskou Úniou prostredníctvom ErasmusPlus. Partnermi projektu CHAMPS boli Slovenský šachový zväz (ko-ordinátor), Šach v školách a komunitách (UK), Ludus (Portugalsko), Gironská Univerzita (Španielsko) a škola vo Veľkej Ide, Slovensko. Do projektu sa zapojili aj nasledovný jednotlivci: Carlos Santos, Carme Saurina Canals, Josep Serra, Mark Szavin, Stefan Löffler, Alessandro Dominici, Malcolm Pein, Chris Fegan, Zdenek Gregor, Eva Repková, Vladimir Szucs, Viera Klebusková, Niki Vrbová and Viera Haraštová. Vedúcim projektu bol Štefan Marsina. Diagramy šachovnice boli generované použitím Logiq Board zo stránky LearningChess.com (Maďarsko).

John Foley *(@ChessScholar)*
Rita Atkins
Carlos Santos
Viera Haraštová

Marec 2019

50 Úloh

Matematické Témy

1. Koordináty, pozície, pohyby, ceruzka
2. Parita, Vizualizácia, ceruzka
3. Vzory, triedenie, poradie, postupnosť, ceruzka
4. Parita, symetria
5. Parita, symetria
6. Aritmetika, symboly, rovnosť, ceruzka
7. Geometria, priestorová predstavivosť, výpočet, priesečník
8. Výpočet, holubníkový princíp, maximum/minimum
9. Aritmetika, pokus a omyl, vstup/výstup
10. Výpočet, symetria
11. Geometria, priamky, uhol sklonu, pravítko
12. Geometria, priamky, uhol sklonu, pravítko, ceruzka
13. Práca pospiatky od cieľa
14. Parita, ceruzka
15. Výpočet
16. Symetria
17. Symetria, Výpočet
18. Tvary, symetria
19. Výpočet, Vennov diagram, pokus a omyl
20. Výpočet, parita
21. Disjunkcia, zjednotenie množín, symetria
22. Logika
23. Priamky, uhol sklonu, pokus a omyl
24. Výpočet, priestorová predstavivosť
25. Výpočet, priestorová predstavivosť
26. Logika, informácie, stromové grafy
27. Symetria, Práca pospiatky od cieľa
28. Tvary, parita
29. Pokus a omyl, symetria, násobky, rozdeľ aby si dobyl
30. Výpočet, pokus a omyl
31. Geometria, meranie vzdialeností, vzájomné učenie
32. Symetria, Násobky
33. Symetria, Násobky, sila
34. Symetria, Násobky, stromové grafy, Práca pospiatky
35. Symetria, reprezentácia
36. Symetria, parita, Práca pospiatky
37. Výpočet, Paskalov trojuholník
38. Výpočet, Paskalov trojuholník
39. Výpočet, Paskalov trojuholník
40. Rozklad plochy na štvorce, pokus a omyl
41. Rozklad plochy na štvorce, Výpočet, pokus a omyl, meranie plochy, druhé mocniny čísel
42. Výpočet, pokus a omyl
43. Výpočet, pokus a omyl
44. Výpočet, tvary, aritmetika, práca s informáciami v tabuľke
45. Logika, práca s informáciami v tabuľke
46. Výpočet, pokus a omyl, Symetria
47. Výpočet, pomer, práca s informáciami v tabuľke
48. Exponenciálny Rast, geometrická postupnosť
49. Výpočet, tvary, práca s informáciami v tabuľke
50. Výpočet, Symetria, uhly

1 Každé pole má meno Jednotlivec

Vek 6+	*KOORDINÁTY, POZÍCIE, POHYBY, CERUZKA*

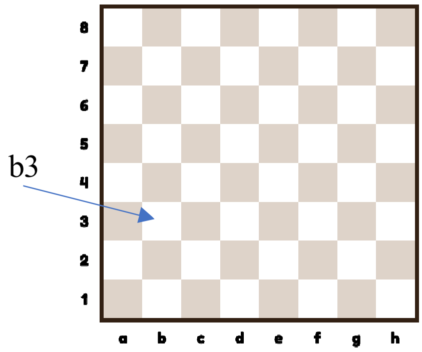
Toto cvičenie je dôležité pre pochopenie polohy na šachovnici

Praktické cvičenie

Vysvetlite, že každé pole má meno podľa jeho súradníc:
stĺpec písmeno a rad číslo. Príklad b3 na diagrame: Choďte hore ulicou (b) k domu číslo 3.
Pre malé deti nakreslite čiaru od poľa k jeho súradniciam.

Rozdajte výtlačky šachovnice. Použite ceruzky.

Úloha: Napíšte meno každého poľa na šachovnici.



Figúrka 1: Prázdna šachovnica

Hry

(a) Učiteľ nahlas volá mená polí a žiada triedu aby na ne umiestnili figúrku (spočiatku nie veľmi jednoduché).
(b) Načrtnite cestu (napr. a1-a5)
(c) Urobte ťah (napr. C8-h3) a požiadajte triedu o koordináty
(d) Postavte vežu na a1 a opýtajte sa triedy ako sa môže dostať na f5.
(e) Vytlačte na šachovnici labyrint a požiadajte deti o súradnice únikovej cesty.
(f) Použitím pásov suchého zipsu nechajte deti naslepo umiestniť figúrky, iba za použitia hmatu.

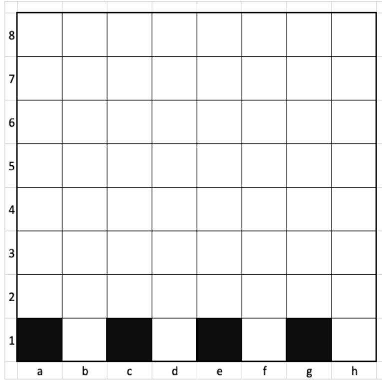
Pomenovanie polí so zaviazanými očami

2 Urči farbu poľa — Celá trieda

Vek 6+	*Parita, Vizualizácia, Ceruzka*

Rozdajte hárky, na ktorých je šrafovaný iba prvý rad.
Vysvetlite striedavé šrafovanie.

Úloha: dokončite vzor šachovnice.



Úloha pre celú triedu

Učiteľ odvráti tvár od tabule s prázdnou šachovnicou a požiada deti aby zakričali pole. Učiteľ určí farbu poľa, napr. c4 je biele. Opakujte s deťmi

Diskusia v triede Aké postupy môžeme použiť aby sme zistili odpoveď?

Možné metódy:

(a) **Vzor hada:** a1 = čierna, b1 = biela, c1 = čierna, ...h1 = biela, h2 = čierna, g2 = biela atď.

(b) **Uhlopriečky:** Dlhé uhlopriečky (Čierna a1-h8; Biela a8-h1) cestujú cez šachovnicu. Nájdite pole najbližšie tomu, ktoré potrebujete a prispôsobte podľa toho farbu.

(c) **Doplnenie o parita** (vek 11+) Zmeňte označenie radov z a, b, c ... Na 1, 2, 3, a pridajte koordináty požadovaného poľa. Ak je súčet párny, potom pole je čierne.

Rozšírenie:

Vizualizácia (vek 8+)

Žiaci si zatvoria oči a zdvíhajú pravú ruku pre biele a ľavú ruku pre čierne pole, ktoré je zvolané.

Fotka: Deti odpovedajúce na c4

3 Triedenie figúrok Skupiny

Vek 6+	Vzory, Triedenie, Poradie, Postupnosť, Ceruzka

Praktické cvičenie

Ukážte triede, že všetci pešiaci sú rovnakej veľkosti a menšie ako iné figúrky
Ukážte, že veľkosť figúrok sa zmenšuje čím sú bližšie k rohu

♚=♛ > ♝> ♞> ♜

Úlohy: nájdite

(a) 5 spôsobov rozdelenia šachových figúrok, napr. podľa farby, či sa kĺžu alebo skáču, atď.
(b) 5 spôsobov usporiadania šachových figúrok, napr. podľa ich výmennej hodnoty, veľkosti základne atď. Použitie žetónov rozdelenie urýchľuje.

Rozšírenie

Učiteľ deťom ukáže skupiny figúrok a požiada triedu o vysvetlenie princípu rozdelenia do skupín

Metóda riešenia

Pre generovanie nových myšlienok je nutné skombinovať viaceré prístupy.

- Brainstorming predstavuje prezentovanie nápadov v skupine
- Porovnajte a posúďte rozdiely dvoch druhov figúrok
- Diskutujte o tom, ako sa tretí druh figúrky odlišuje od ďalších dvoch
- Analyzujte figúrky samostatne, na ich štartovných pozíciách, alebo počas hry.

Odpoveď

Klasifikácia

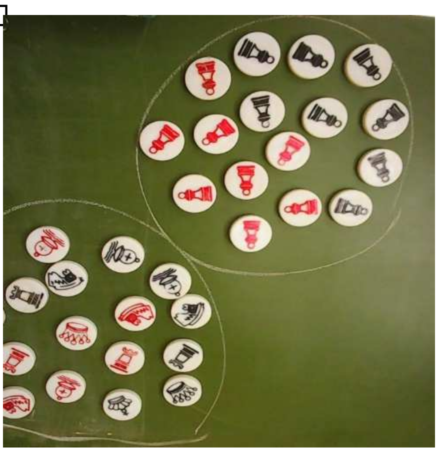
- ☐ Farba figúrky
- ☐ Môže/nemôže sa pohnúť zo štartovnej pozície
- ☐ Farba obsadeného štartovného poľa
- ☐ Dlhonohá verzus krátkonohá
- Ťažký verzus ľahký
- ☐ Pešiaci verzus figúrky
- ☐ Dôležitý verzus podradný
- ☐ Kĺzavé figúrky/Skokani
- ☐ Schopnosť stáť hore nohami

Usporiadanie

- ☐ Výška
- ☐ Priemer základne
- ☐ Výmenná hodnota
- ☐ Počet figúrok každého druhu
- ☐ Najrýchlejší na druhej strane šachovnice z nezablokovaného štartovného poľa
- ☐ Abecedne (závisí od jazyka)
- ☐ Počet figúrok jedného druhu, ktoré sa zmestia na jedno hracie pole

Riešenia predložené deťmi:

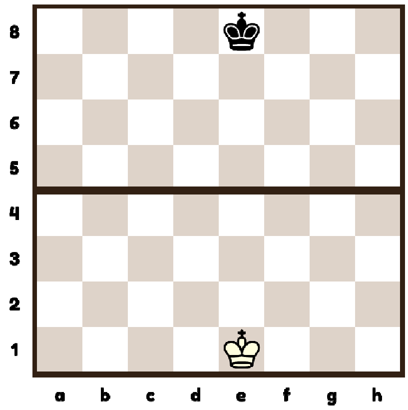
☐



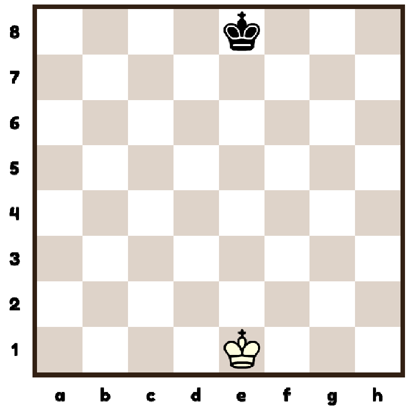
4 Hra Prekroč čiaru Páry

Vek 6+	*Parita, symetria*

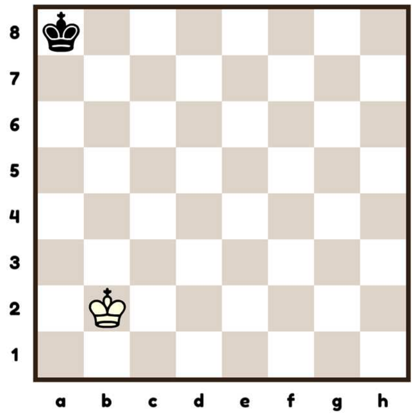
Umiestnite dvoch kráľov na ich štartovné polia. Králi sa pohybujú ako v šachu. Biely ide prvý. Kto vyhráva - prvý alebo druhý hráč? - v každej z týchto pozícií.



Figúrka 4(a) Hráč, ktorý prvý prekročí stredovú čiaru je víťaz



Figúrka 4(b) Biely vyhráva dosiahnutím 8. radu.



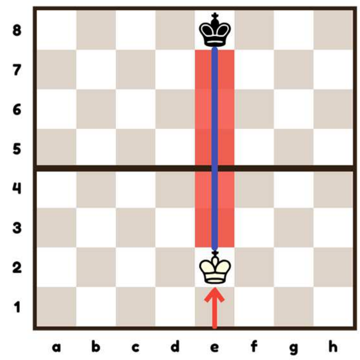
Figúrka 4(b) Čierny hrá a bráni Bielemu aby sa dostal do 8. radu.

Stratégia Hry

Táto hra súvisí s konceptom opozície v šachu. Priama opozícia v stĺpci vznikne keď dvaja králi stoja oproti sebe a medzi nimi je iba jedno voľné pole. Diaľková opozícia v stĺpci vznikne keď dvaja králi stoja oproti sebe a medzi nimi je nepárny počet polí (>1). Týmto táto hra úzko súvisí s konceptom parity a symetrie.

Odpovede

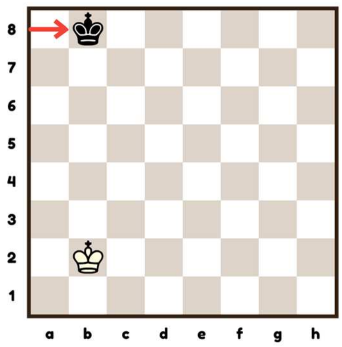
4(A) Ak Biely ide prvý, 1. ♔e2 je víťazný ťah. Keď si všimneme modrú zrkadlovú čiaru, Čierny musí byť prvý, ktorý si vyberie stranu, dávajúc tak možnosť Bielemu aby si vybral druhú. Ak sa Čierny pokúša zostať na zrkadlovej čiare, fakt, že tam je nepárny počet polí medzi kráľmi, sa ukazuje byť rozhodujúcim faktorom pre víťazstvo Bieleho.



4(a) a 4(b) Najlepší ťah pre Bieleho

4(b) Najlepší ťah je rovnaký ako v 4(a)

4(c) Čierny vyhráva udržiavaním diaľkovej opozície s 1..♚b8

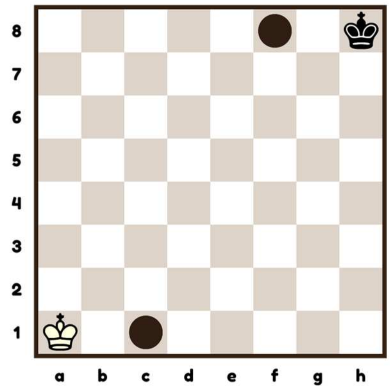


5 Hra Diagonálny Súper — Páry

Vek 6+	*Parita, symetria*

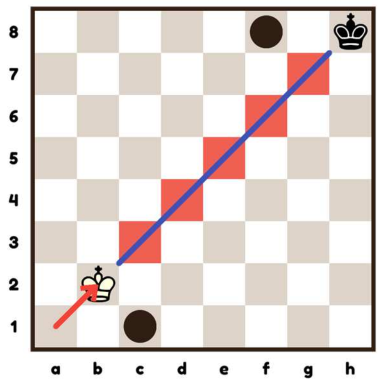
Umiestnite dvoch kráľov do diametrálne opačných rohov. Králi sa pohybujú ako v šachu. Biely ide prvý.
Prvý hráč, ktorý obsadí štartovacie pole súperovho kráľa alebo označené pole na opačnej strane, vyhráva.

Kto vyhráva - prvý alebo druhý hráč?



Stratégia Hry

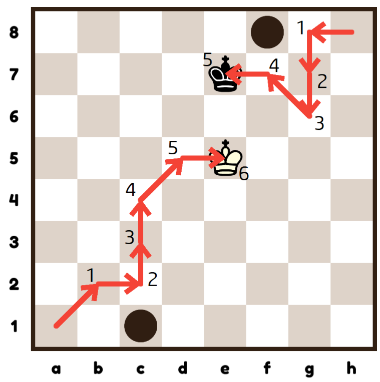
Opozícia pozdĺž diagonálu (namiesto radu alebo stĺpca) sa nazýva diagonálna opozícia. Tento koncept je hlavnou myšlienkou tejto hry.



Odpoveď

1.Kb2 je víťazný ťah. Keď si všimneme modrú zrkadlovú čiaru, tak ako v predchádzajúcej hre, Čierny musí byť prvý, ktorý si vyberie stranu, dávajúc tak možnosť Bielemu aby si vybral druhú.

Všimnite si, že v určitom bode sa môže diagonálna opozícia zmeniť na priamu. Následkom toho, žiak môže využiť predtým nadobudnuté vedomosti v novej situácii - niečo dôležité v matematike.



6 Šachová aritmetika Jednotlivci

Vek 7+	*Aritmetika, symboly, rovnosť, ceruzka*

♕ = 9
♖ = 5
♗ = 3
♘ = 3
♙ = 1

Vysvetlite bežnú bodovú hodnotu každej figúrky.

Vysvetlite: ♕ = ♖ + ♗ + ♙ pretože 9 = 5 + 3 + 1

Úlohy:

(a) ♞ + ♜ + ♟ = ?
(b) ♕ = ♗ + ♗ + ?
(c) Nájdete štyri figúrky ktorých hodnota spolu je rovnaká ako hodnota dámy?
Aký by bol rozdiel, keby bola hodnota dámy 10?
(d) Toto sú figúrky zobraté počas hry, ktorá strana vedie, čierna alebo biela?

1 ♞ ♝ ♛ ♖ ♙

2 ♕ ♞ ♞ ♜

3 ♟ ♟ ♟ ♟ ♜ ♝ ♕ ♘ ♘ ♖ ♖

Odpovede

(a) 9
(b) 3
(c) Nemožné, pretože všetky figúrky majú nepárne čísla, za predpokladu, že hodnota kráľa nie je 0.
Je možné nájsť štyri figúrky do súčtu 10 napr. ♗ + ♗ + ♗ + ♙
(d)
1 Biely
2 Biely
3 Čierny

7 Hlavolam Štyri veže Páry

Vek 7+	*Geometria, priestorová predstavivosť, výpočet,*

Úlohy:

(a) Umiestnite štyri veže na čierne polia tak, že všetky biele polia sú napadnuté.

(b) Nájdite ďalšiu pozíciu , aby ste splnili tú istú úlohu.

Poraďte deťom, aby skontrolovali svoje riešenia.

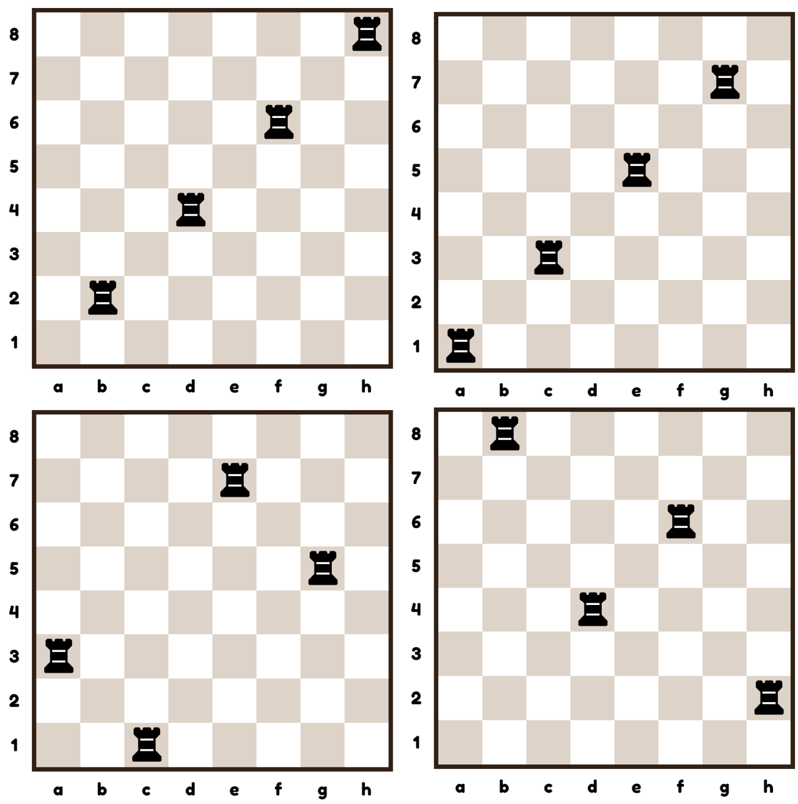
Metóda riešenia

Šachovnica má 32 bielych polí. Každá veža pokrýva 8 bielych polí (4x8 = 32). Všimnite si, že ak veža stojí na bielom poli, pokryje iba 6 ďalších bielych polí. Veža môže pokryť 8 bielych polí, keď stojí na čiernom poli. Preto hľadáme štyri čierne polia, na ktoré veže umiestnime.

Ak veže stoja na čiernych poliach na priľahlých priamkach napr. na a1 a b2, potom sa pokrytie vežami pretína s bielymi poľami b1 a b2, čo znamená, že namiesto pokrytia 16 bielych polí medzi nimi, pokryjú iba 14 bielych polí, čo nepostačuje. Skúmaním zistíme, že veže by od seba mali byť párny počet polí ak vezmeme do úvahy, že ich priesečníky sa musia obmedziť na čierne polia.

Pomôcka:: Začnite nájdením riešenia na dlhom čiernom diagonále. Potom nájdite ďalšie riešenia.

Odpoveď



8. Popadané figúrky Štvorice

Vek 7+	*Výpočet, holubníkový princíp, maximum/minimum*

Po šachovom krúžku je na podlahe veľa šachových figúrok. Zdvihnite ich a spočítajte.
Z koľkých šachových súprav sú?

(a) Je tam 17 čiernych pešiakov.
♟ ♟ ♟ ♟ ♟ ♟ ♟ ♟
♟ ♟ ♟ ♟ ♟ ♟ ♟ ♟ ♟

(b) Okrem 17 čiernych pešiakov nájdete aj 3 biele kone.
♟ ♟ ♟ ♟ ♟ ♟ ♟ ♟
♟ ♟ ♟ ♟ ♟ ♟ ♟ ♟ ♟
♘ ♘ ♘

(c) Trieda má dostatok šachových súprav iba pre 20 detí hrajúcich v pároch.
Preskúmajte najväčšie možné riešenia pre každý vyššie uvedený scenár.

Metóda riešenia

Praktické skúmanie pomocou žetónov.
Vysvetlite význam maxima a minima a požiadajte o ich nájdenie pri každej otázke.
Všimnite si, že sme nehovorili o pravdepodobnosti výsledku, ale iba o tom, či je možný.

Odpoveď

Odpoveď by mala byť na škále: jedna alebo viac figúrok môže pochádzať z každej súpravy.
Je dôležité uvedomovať si, že nie všetky odpovede sú jednociferné čísla.

(a) Medzi 3 a 17
Sú potrebné najmenej 3 súpravy, pretože jedna obsahuje iba 8 pešiakov. Ak do každej súpravy patrí jeden pešiak, potom potrebujeme najväčší možný počet súprav.

(b) Medzi 3 a 20
Nepotrebujeme viac ako 3 súpravy, pretože tieto už obsahujú 3 bielych jazdcov. 20 figúrok chýba, tie by mohli v najhoršom scenári pochádzať z 20 súprav. Farba nie je podstatná.

(c) Medzi 3 a 10
Najmenšie možné číslo sa nemení. Najvyššie možné číslo je obmedzené požiadavkou, že počet šachovníc je 10 (to znamená: 20÷2).

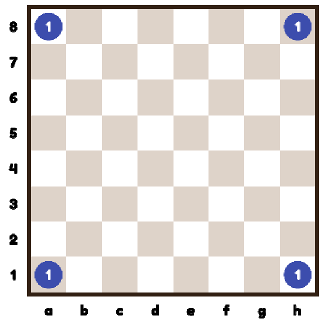
9 Hlavolam Útok z rohu Štvorice

Vek 7+	*Aritmetika, pokus a omyl, vstup/výstup*

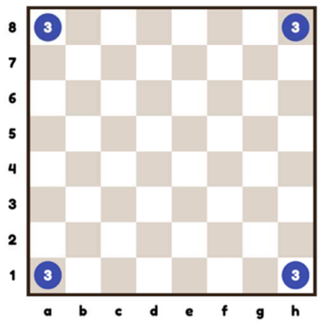
Každý roh inak prázdnej šachovnice je obsadený neznámou šachovou figúrkou. Tieto figúrky môžu byť napadnuté jednou alebo viacerými neznámymi figúrkami v ďalších rohoch. Ignorujte farby.

Každé pole v rohu obsahuje číslo. To predstavuje celkový počet napadnutí poľa figúrkami v ostatných rohoch. Každá figúrka útočí aspoň na jednu ďalšiu figúrku.

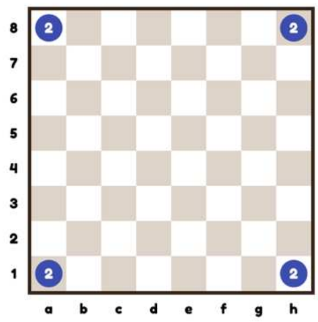
Praktické úlohy: Z nižšie poskytnutých informácií vydedukujte aké sú štyri rohové figúrky:



Úloha 9(a)



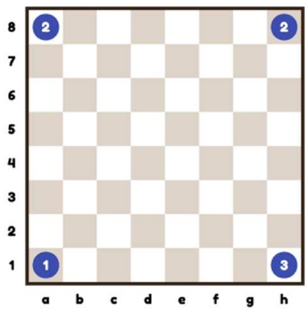
Úloha 9(b)



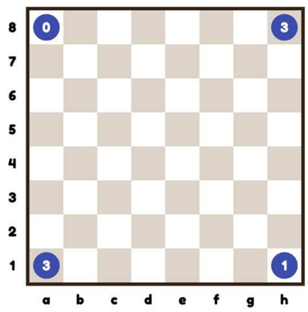
Úloha 9(c)

(d) Existuje ďalšia odpoveď na 9(c)?

Rozšírenie

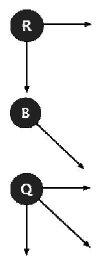


Úloha 9(e)



Úloha(f)

Metóda riešenia



- Určite, že dôležité figúrky sú len diaľkové figúrky ♗ ♖ ♕
- Určite, že počet polí napádaných každou figúrkou je ♗=1 ♖=2 ♕=3
- Vysvetlite, že vstupný počet útokov sa rovná výstupnému počtu útokov t.j súčet hodnôt napádania = súčet hodnôt čísel v rohoch Všimnite si, že existuje iba jeden spôsob pre získanie výsledku 4 a 12, pričom sú zároveň najmenšie a najväčšie možné výsledky.

Odpovede

(a) ♗ ♗ ♗ ♗
(b) ♕ ♕ ♕ ♕
(c) ♖ ♖ ♖ ♖

(d) ♗ ♗ ♕ ♕
(e) ♗ ♖ ♕ ♖
(f) ♕ ♗ ♗ ♖

10.Kontúra sily figúrky Štvorice

Vek 7+	Výpočet, symetria

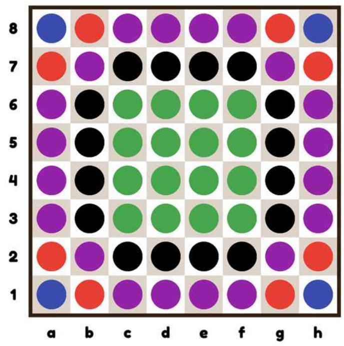
Sila figúrky sa mení podľa jej pozície na šachovnici. Sila figúrky je počet polí, ktoré napadá.

Praktické úlohy: (Použitím farebných ceruziek na výtlačkoch šachovnice alebo farebné žetóny)

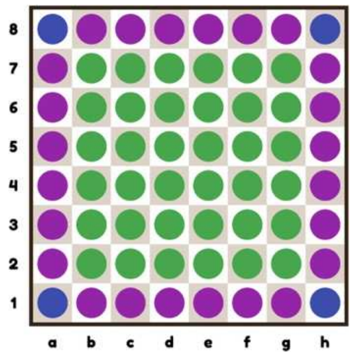
Každé pole odlíšte farbou podľa počtu polí, ktoré sú z tohto poľa napádané.
Výsledný vzor je kontúra “sily” danej figúrky. Nájdite kontúry pre tieto figúrky:

- Veža
- Strelec
- Dáma

Ktorá figúrka je vykreslená kontúrou sily?



Figúrka 10(a)

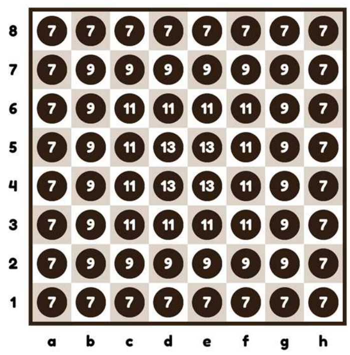


Figúrka 10(b)

Odpovede

Veža 14 rozdávanie uniforiem
Strelec Viď diagram
Dáma = Strelec + Veža
Pripočítajte 14 ku každému poľu kontúry strelca

10(a) Jazdec
10(b) Kráľ



Sila Kontúry Strelca

11. Hra Vyhni sa trom v línii Páry

Vek 8+	Geometria, priamky, uhol sklonu, pravítko

Začíname s prázdnou šachovnicou, dvaja hráči sa striedajú v umiestňovaní žetónov rovnakej farby na šachovnici. Hráč prehráva hru vytvorením rovnej priamky z troch žetónov. Neexistuje povinnosť oznámiť súperovi prehru. Použite pravítko umiestnené stredom cez žetóny, aby ste vyhľadali priamky. Hra je dostatočne jednoduchá, ale zmätok môže spôsobiť to, ako zistiť či tretí žetón je na rovnakej priamke ako prvé dva.

Metóda hrania

Po každom ťahu skontrolujte šachovnicu. Žetón môže utvoriť priamku troch aj keď je trocha vzdialený.

Vysvetlite, že priamky môžu ísť rôznymi smermi. Priamky používané pri kĺzavých ťahoch vežou je najľahšie rozpoznať.

+ Veža (kolmý)

- zvislý (hore, dole)
- vodorovný (vľavo, vpravo)

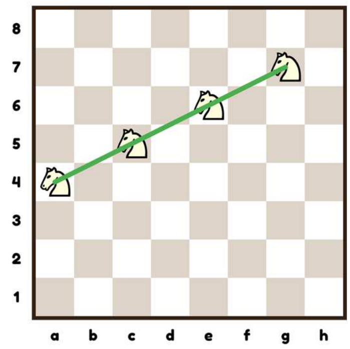
Priamky používané pri kĺzavých ťahoch strelcom je takisto ľahké rozpoznať:

x Strelec (diagonál)

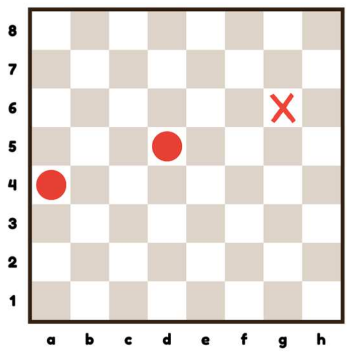
- uhol sklonu začínajúci vľavo dole až vpravo hore (uhol sklonu = 1)
- uhol sklonu začínajúci vľavo hore až vpravo dole (uhol sklonu = -1)

Uhol sklonu medzi ľubovoľnými dvomi žetónmi je pomer medzi zvislou a vodorovnou vzdialenosťou. Ak je uhol sklonu medzi dvomi žetónmi rovnaký ako uhol sklonu od nich k tretiemu žetónu, potom sú žetóny na tej istej priamke. Priamky smerujúce vpravo hore majú kladný uhol sklonu a tie smerujúce vľavo dole majú záporný uhol sklonu.

Jazde sa pohybuje 2:1 v tvare písmena L. Priamky sa tiež rozbiehajú od jazdca, ale tieto je náročnejšie rozpoznať. Uhol sklonu je pri uvažovaní o jazdcovi dôležitý. V diagrame napravo sa zdá, že všetci jazdci sú na rovnakej priamke a ich uhol sklonu je ½ pretože zvislá vzdialenosť (1) je rozdelený zvislom vzdialenosťou (2).



Ťah jazdca má



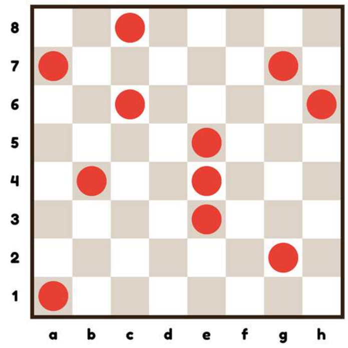
V diagrame naľavo sú dva žetóny (a4, d5) so zvislou (hore) vzdialenosťou 1 a vodorovnou (naprieč) vzdialenosťou 3 (ako jazdec s dlhým dosahom). Takže ich pomer je 1/3. Pomocou skúmania, pole g6 je tiež na 1/3 uhle sklonu od d5. Ak a4-d5 majú uhol sklonu 1/3 a d5-g6 majú uhol sklonu 1/3, potom priamka prechádza tromi poľami a4-d5-g6. Hráč, ktorý je na ťahu by si mal vybrať iné pole ako g6.

Umiestnením žetónú na g6 prehráva

12. Žetóny na priamke [11] Páry

Vek 8+	Geometria, priamky, uhol sklonu, pravítko

Výtlačky šachovnice s 11 žetónmi podľa uvedenej predlohy.



Úlohy

(a) Koľko skupín troch žetónov nájdete na rovnej priamke?

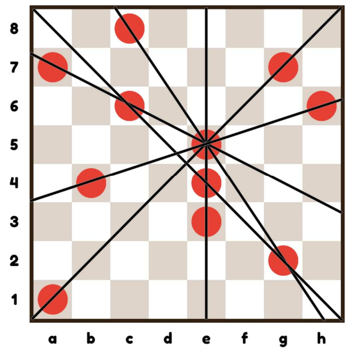
(b) Umiestnite na šachovnicu dvanásty žetón a vytvorte štyri ďalšie skupiny troch v rade.

Túto hru je jednoduchšie dokončiť ak si najprv zahráte hru v úlohe 11.

Metóda riešenia

(a) Deti dokážu nájsť zvislé a diagonálne priamky ľahko (a7-c6-e5; e5-e4-e3; g7-e5-a1). Je pre náročnejšie nájsť priamky, ktorých uhol sklonu je iný ako diagonálny.

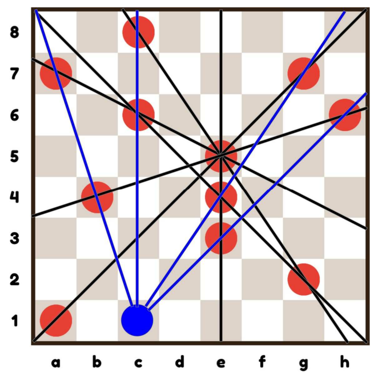
Pravítko umiestnite medzi stredy ľubovoľných dvoch žetónov. Uistite sa, že pravítko prechádza stredmi. Zistite, či sa pozdĺž rovného okraja nachádza tretí žetón. Otestujte pre všetky páry žetónov.



Prípadne, zistite uhol sklonu priamky medzi ľubovoľnými dvomi bodmi. Uhol sklonu je pomer medzi zvislou a vodorovnou vzdialenosťou od jedného žetónu k druhému, napr. dve hore a tri krížom. Potom z druhého bodu zistite či existuje ďalší bod, ktorý má rovnaký uhol sklonu. Ak áno, potom sú všetky tri body na tej istej priamke. Test s použitím pravítka (viac detailov v úlohe 11).

(b) Postupujte systematicky žetón za žetónom, používajúc pri tom pravítko, overte či dokážete nájsť nejaké priamky. Deťom zvykne chýbať systematický prístup.

Pomôcka: začnite na a1 a choďte k najbližšiemu žetónu.
Z c1 sa rozbiehajú priamky c1-c6-c8; c1-e3-h6; c1-b4-a7; c1-e4-g7.

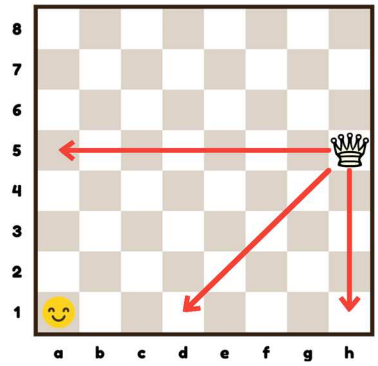


13. Hra Wythoff [Q] Páry

Vek 8+	*Práca pospiatky od cieľa*

Kráľovnú umiestnite na h5 na prázdnej šachovnici. Táto kráľovná sa môže hýbať iba na západ, juhozápad, alebo juh. Hráči sa pri ťahu kráľovnou striedajú. Hráč, ktorý prvý potiahne kráľovnou na a1 je víťaz.

Kto vyhráva - prvý alebo druhý hráč?

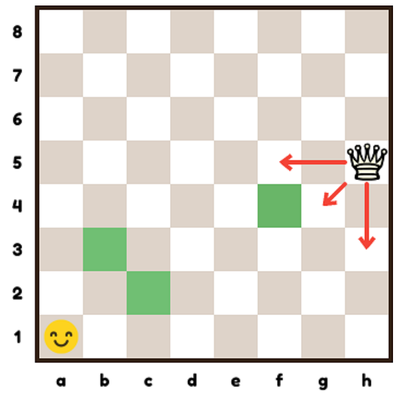


Metóda riešenia

Najprv si hru zahrajte, aby ste získali predstavu o najlepšej možnej hre.

Určite „bezpečné polia“, na ktoré by ste sa chceli presunúť,
aby ste vyhrali. Aby ste to urobili, pracujte pospiatky z a1.
Na označenie bezpečných polí použite žetóny.

Existujú tri bezpečné polia: b3, c2 a f4 (označené zelenou).



Odpoveď

Druhý hráč vyhráva najlepšou hrou.

Pri prvom ťahu nedokáže prvý hráč zabrániť druhému, aby sa dostal na bezpečné pole alebo, aby išiel rovno na a1.

14. Hlavolam Veža v rohu Páry

Vek 8+	Parita, ceruzka

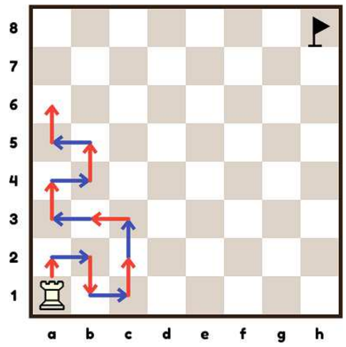
Použite ceruzky a veľa výtlačkov šachovnice s vežou na a1.

Úloha: Veža musí prejsť všetky polia na šachovnici a skončiť na h8.
Podmienka: Veža nemá dovolené navštíviť to isté pole dva krát.

Metóda riešenia

Vyskúšaním niekoľkých rôznych ciest prídu deti k záveru, že riešenie neexistuje. Možno budú potrebovať trochu presviedčania, aby pochopili, že ak zlyhali v nájdení riešenia, neznamená to, že žiadne neexistuje. Dokázať, že niečo je nemožné, je v matematickom ponímaní detí obrovský pokrok.

Pomôcky a vodiace otázky pri sprevádzaní na ceste k riešeniu



- Veža by na svojej ceste mala postupovať jedno-krokovými ťahmi. Použite dve farby: napr. červenú pre nepárne (1., 3., 5., atď.) a modrú pre párne ťahy, tak ako znázorňuje diagram.
- Koľko polí veža navštívi na svojej ceste na h8?
- Aká je farba 1., 2., 3., 4., atď. poľa?
- Aká je farba 63. poľa?
- Aká je farba cieľového poľa h8?

Odpoveď

Každé nepárne navštívené pole je bledé, takže 63. pole by malo byť bledé, ale v skutočnosti je tmavé, takže veža nikdy nemôže splniť svoju misiu.

Rozšírenie

Otázka: Na akej veľkej šachovnici by výprava vežou fungovala?
Odpoveď: Úloha je možná len pre nepárne veľké šachovnice (7x7, 5x5, 3x3 atď.)

15. Najkratšia výprava vežou — Jednotlivec

Vek 8+	*Výpočet*

Použite ceruzky a veľa výtlačkov šachovnice s vežou na a1.
Prípadne položte na šablónu šachovnice plastovú fóliu. Ukážte na vežu na a1 a na značku na h8.
Úloha: Veža musí prejsť všetky polia na šachovnici a vrátiť sa na štartovnú pozíciu.
Podmienka: Veža nemá dovolené navštíviť to isté pole dva krát.

Navrhované aktivity:

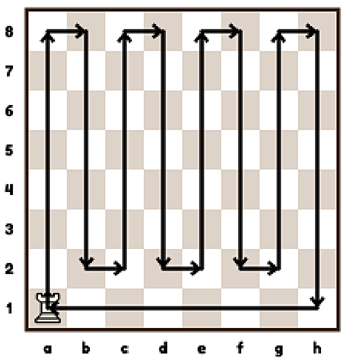
- Nájdite čo najviac možných spôsobov dokončenia výpravy vežou.
- Nakreslite každú výpravu na papier.
- Zistite dĺžku každej výpravy, ktorú ste nakreslili.

Upozornite, že polia, ktorými veža prejde cestou z jedného miesta na druhé, sú počas ťahu počítané ako ´navštívené´. Je dôležité zdôrazniť, že veža sa vráti na jej štartovnú pozíciu na a1. Nechajte deti preskúmať rôzne výpravy a určiť ich dĺžku.

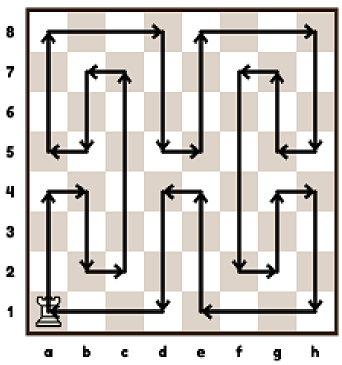
Bádanie

- Aký je najmenší počet ťahov na dokončenie výpravy?
- Aká je najdlhšia výprava (najvyšší počet ťahov), ktorú dékážete nájsť?

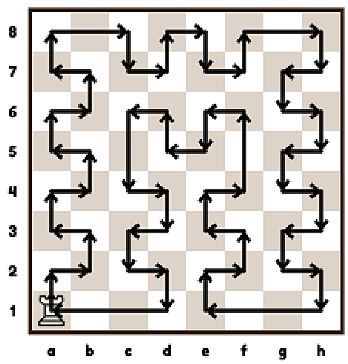
Odpoveď



Výprava s minimálne 16 ťahmi



Výprava s 28 ťahmi



Najdlhšia výprava s 56 ťahmi

Dá sa dokázať, že najkratšia výprava pozostáva zo 16 ťahov. Avšak, niektoré dôležité vlastnosti výpravy vežou môžu byť preskúmané. Diskusia:

- Ak veža začne zvislým ťahom, musí skončiť vodorovným ťahom.
- Zvislé a vodorovné ťahy sa striedajú.
- Existuje rovnaký počet vodorovných a zvislých ťahov.
- Dĺžka každej výpravy je párne číslo.

56 ťahov - nesprávna odpoveď!

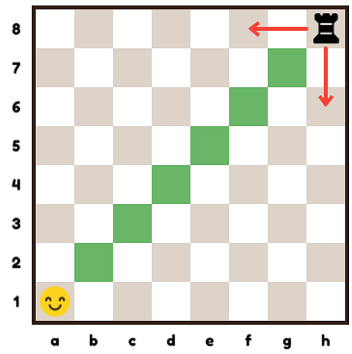
16. Uháňaj do rohu [veža] Páry

Vek 8+	Symetria

Použite šachovnicu, vežu, žetóny na označenie ťahov Umiestnite vežu na h8 a značku na a1.
Táto veža sa môže pohybovať iba na juh alebo západ.
Hráči sa pri ťahu vežou striedajú.
Prvý hráč, ktorý dosiahne pole a1 vyhráva hru.

Toto je hra, ktorú deti radi hrajú. Kto vyhráva - prvý alebo druhý hráč?

Metóda hrania



Stratégia druhého hráča je výherná. On/ona musí vežou ťahať dlhú diagonálu na a1-h8. Tu je spôsob navigácie detí k riešeniu:

- Najprv by mali deti hru preskúmať samy. Požiadajte ich, aby našli spôsob ako vyhrať. Spýtajte sa ich, či dávajú prednosť byť v tejto hre prvým alebo druhým hráčom.
- Hrajte proti dieťaťu alebo skupine detí ako druhý hráč používajúc správnu stratégiu.
- Ak výhernú stratégiu stále nenašli, povedzte im aby premýšľali o dôležitosti dlhej diagonály a1-h8.

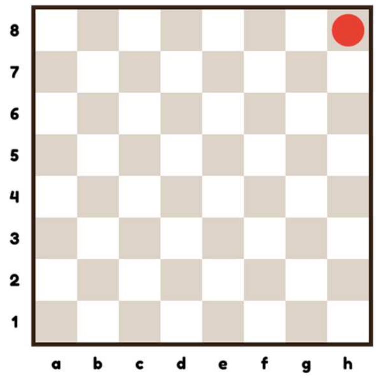
17.Hltanie Páry

Vek 6+	Tvary, symetria

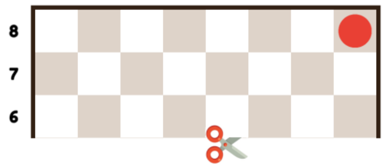
Použite výtlačky šachovnice so značkou “jed“ na h8. Viď obrázok 18(a).

Hráči sa striedajú pri skladaní (“hltaní“) papierovej šachovnice horizontálne alebo vertikálne pozdĺž ľubovoľnej vyznačenej čiary. Viď obrázok 18(b).

V tejto hre nie sú žiadne figúrky. Časť ďalej od značky je odhodená. Prehráva ten hráč, ktorý drží jed.
V pôvodnej hre sa hralo s veľkými tabuľkami čokolády!
Kto vyhráva - prvý alebo druhý hráč?



Obrázok 18(a) Vyhnite sa držaniu h8

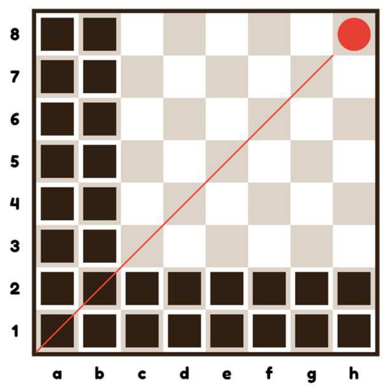


Obrázok 18(b) Hltanie horizontálne

Metóda hrania

V záujme vyhrať by mal hráč využívať geometrickú stratégiu. Nech prvý hráč spraví čokoľvek, druhý hráč by mal zahnúť papier tak, aby šachovnica zostala v tvare štvorca. Viď obrázok 18(c).

Inými slovami, výherná stratégia je hltať pozdĺž diagonály na h8.
Súper nebude mať inú možnosť ako zahnúť do obdĺžnika.
Postupne, v každom ťahu sa stratégia zachovania štvorcového tvaru opakuje, až kým nie je dosiahnuté otrávené pole.



Obrázok 18(c) Ďalší hráč môže iba vytvoriť obdĺžnik

18. Hlavolam Vojenská sila Páry

Vek 8+	Výpočet, Vennov diagram, Pokus a omyl

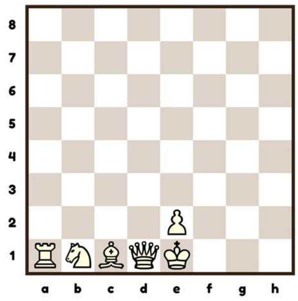
Postavte jednu figúrku každého druhu rovnakej farby na ich štartovné polia Viď obrázok 19(a).

Q1: Koľko polí napáda Biely? Polia, ktoré sú napadnuté viackrát, sa počítajú iba raz.

Q2: Určite polia, ktoré sú napadnuté raz, dvakrát, trikrát.

Q3: Premiestnite figúrky tak aby ste našli najmenší počet napadnutých polí.

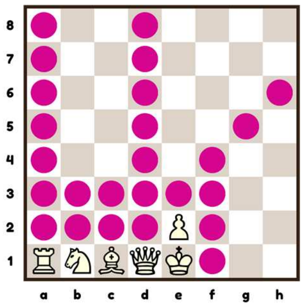
Q4: (pokročilý) Premiestnite figúrky tak, aby ste našli najväčší počet napadnutých polí.



Obrázok 19(a) Hlavolam Vojenská sila

Odpovede

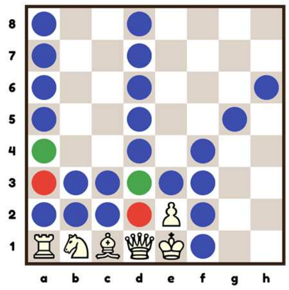
Q1: 25, viď obrázok 19(b)



Obrázok 19(b) 25 pokrytých polí

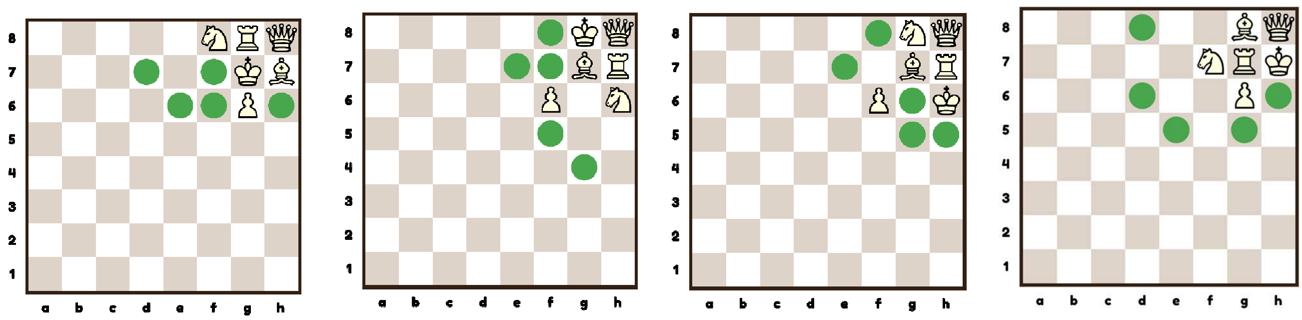
Q2: Viď obrázok 19(c)

- 1 útok
- 2 útoky
- 3 útoky



Obrázok 19(c) Viacnásobné útoky

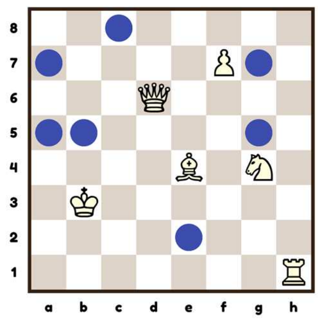
O3: Minimálny počet útokov je 5, dosiahnutý viacerými spôsobmi. Viď obrázok 19(d).



Obrázok 19(d) Minimálny počet útokov

O4: Najväčší počet napadnutých polí je 51.

6 polí je okupovaných figúrkami.
7 polí je nenapadnutých.



Obrázok 19(c) Maximálny počet útokov

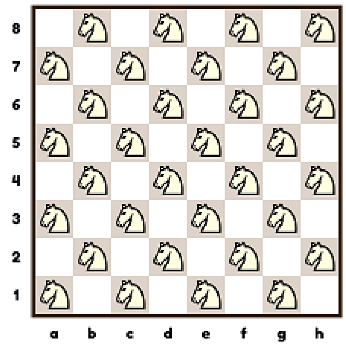
Rozšírenie
O5 Povedzte triede polohu neobsadených polí a požiadajte ich, aby zistili pozície figúrok.

19. Najvyšší počet jazdcov Páry

Vek 8+	Výpočet, parita

Aký je najvyšší počet jazdcov, ktoré môžu byť postavené na šachovnici tak, aby žiaden jazdec nenapadal iného?

Miesto jazdcov použite žetóny.



Metóda riešenia

Jazdci, ktorí nenapádajú jeden druhého sa nazývajú nezávislí jazdci. Všimnite si, že jazdec mení farbou pri každom ťahu (z bledého poľa na tmavé a naopak). Jazdci umiestnení na rovnakých farbách budú nezávislí.

Odpoveď

Najvyšší počet je 32.

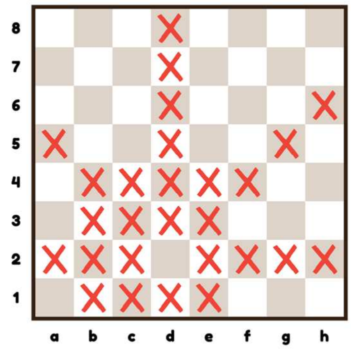
20. Záhada kombinovanej figúrky Páry

Vek 8+	Disjunkcia, zjednotenie množín, symetria

Kombinovaná figúrka kombinuje sily rozličných šachových figúrok.

Záhadná kombinovaná figúrka napáda polia označené krížikom v diagrame:

(a) Označte, kde je záhadná figúrka umiestnená
(b) Určite figúrky, ktoré sa v nej kombinujú



Zopakujte si vzory figúrok v cvičení 10.

Metóda riešenia

Odhaľte symetriu okolo d2.

(a) Nájdite najdlhšie priamky a spojte ich spolu pravítkom a ceruzkou. Toto sú dosahy figúrok s dlhou vzdialenosťou. Pozrite sa, kde sa pretínajú. D8-d1, a5-e1, h6-c1, a2-h2

(b) Všimnite si, že dáma na d2 sa zhoduje so vzorom krížov. Odpočítajte vzor dámy a pozrite sa, čo ostane. Toto sa zhoduje s ťahmi jazdcov.

Odpovede

(a) d2
(b) dáma + jazdec

21. Pozičná logika Páry

Vek 8+	Logika

Začínajúce figúrky ♚♛♜♝♞♟

Praktické cvičenie s deťmi, ktoré musia vytvoriť správnu pozíciu na šachovnici.
Úloha: Vytvorte pozíciu s vyššie uvedenými figúrkami dodržaním nasledovných pravidiel:

1. Figúrky stoja vedľa seba na rovnakej priamke
2. Kráľ je vedľa dámy, ktorá je na c4
3. Veža je medzi strelcom a pešiakom
4. Strelec je najvzdialenejšia figúrka od dámy
5. Jazdec stojí vo vyššej rade ako kráľ

Metóda riešenia

Táto úloha môže byť vyriešená domnienkou, pokusom a omylom. Prípadne, môžeme zapojiť štruktúrovanejší prístup. Kľúčom je nájsť dobrý štartovný bod. Využite informácie tak, že nebude potrebné hádať. Napríklad:

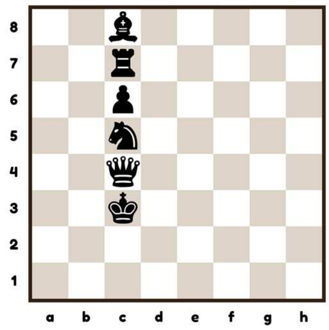
(a) Z (5) sme sa dozvedeli, že figúrky sú usporiadané vertikálne pozdĺž stĺpca c

(b) Z (2) vieme, že pozícia dámy je pevne stanovená na c4

(c) Z (3), nachádza sa tam segment 3 figúrok strelec+veža+pešiak
Nad dámou na c4 sa nachádzajú iba štyri polia a pod ňou tri.
Aby sme splnili (4), strelec musí byť na c8, čo je najvzdialenejší bod od dámy v stĺpci c.

(d) Z (5), jazdec je nad kráľom, ktorý keďže c4 je obsadené, musí byť na c5 alebo vyššie.

(e) Vyraďovaním zistíme, že kráľ stojí na c3.



21 Riešenie

Rozšírenie

Kreatívna aktivita: Požiadajte deti, aby vymysleli problém pozičnej logiky. Ocenenie ´najlepší problém´získa ten, kto príde s jedinečným riešením!

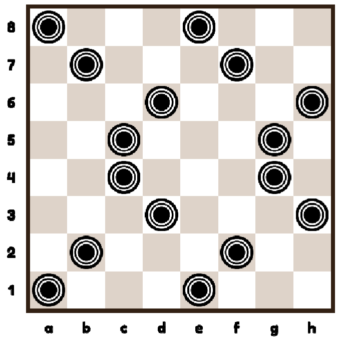
22. Žetóny na priamke — Páry

Vek 8+	Priamky, uhol sklonu, pokus a omyl

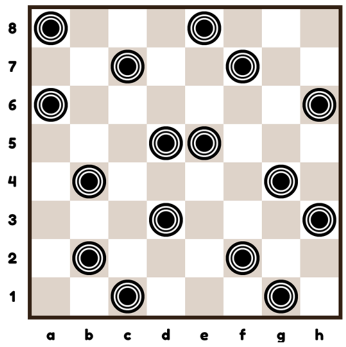
Deti rozoznávajú horizontálne, vertikálne alebo diagonálne priamky. Je pre ne ťažké určiť priamky s iným uhlom sklonu, hlavne keď sú žetóny umiestnené oddelene.

Úloha 1: Rozdajte výtlačky týchto dvoch pozícií a požiadajte triedu, aby našli zmarené priamky, v ktorých sú tri žetóny v rade.

(a)



(b)



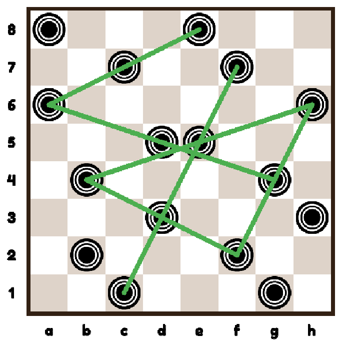
Úloha 2: Umiestnite 16 žetónov na šachovnicu tak, aby neboli tri za sebou v línii.

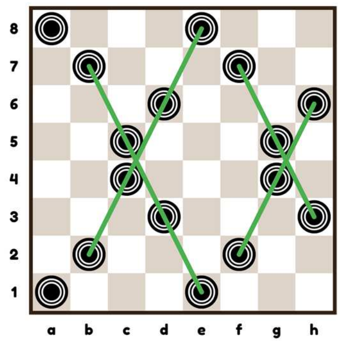
Metóda riešenia

Riešene vyžaduje metódu pokusu a omylu, zatiaľ čo hľadáme všetky možné priamky. Tu je pár pomôcok:

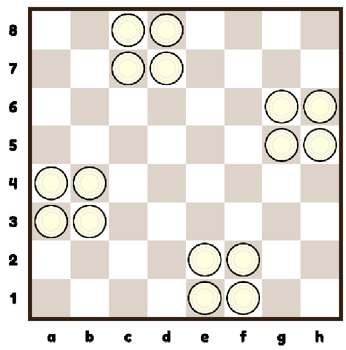
- Začnite umiestením žetónov do skupín (napr. štyroch), čo uľahčuje hľadanú úlohu.
- Umiestnite dva žetóny v každom stĺpci a každom rade, pričom kontrolujte že sa nedotýkajú na diagonálach. Potom hľadajte ďalšie uhly sklonu umiestnením pravítka stredom cez žetóny.
- Keď sa priblížite riešeniu, skúste systematicky upraviť susediace žetóny.

Úloha 1

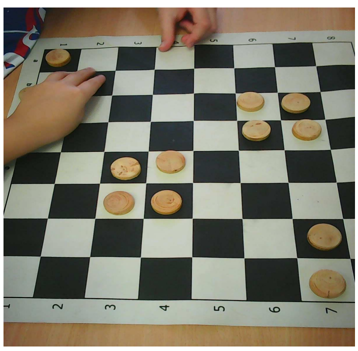




Úloha 2



Jedno riešenie: Štyri skupiny po štyri



23. Mapa najmenšieho počtu pohybov Páry

Vek 9+	Výpočet, priestorová predstavivosť

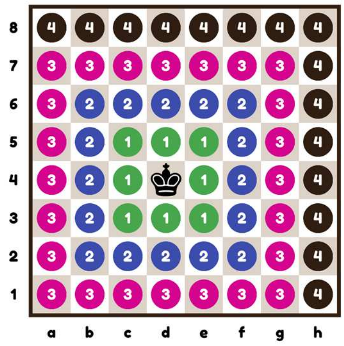
Úloha

Použite farebné žetóny na postavenie farebne kódovanej mapy šachovnice ukazujúcej najmenší počet ťahov potrebný pre figúrku tak, aby dosiahla každé pole z d4 pre figúrky: (a) kráľ; (b) jazdec.

Metóda riešenia

Začínajúc na d4, označte všetky polia, ktoré môžete dosiahnuť jedným ťahom. Potom z každého takéhoto poľa opakujte proces použitím rozličných farebných žetónov. Opakujte, až kým už nie sú žiadne ďalšie polia.

Odpoveď



24. Koľko ciest? [pešiak]

Vek 9+	*Výpočet, priestorová predstavivosť*

Pešiak sa môže pohybovať jedno pole vpred rovno alebo diagonálne. Poznamenajte, že pešiak sa môže pohybovať aj vyhodením imaginárnej figúrky, takže diagonálne ťahy musia byť tiež počítané.

Úloha: (Použite výtlačky týchto pozícií) Koľko rozličných ciest existuje pre pešiaka:

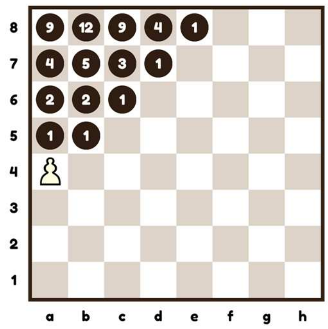
	Od	Do
(a)	a2	Druhú stranu
(b)	d5	Druhú stranu
(c)	d4	d8

Metóda riešenia

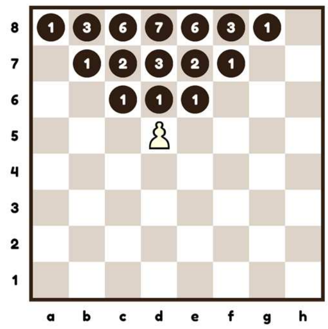
Pri každej možnej pozícii pešiaka spočítajte počet spôsobov, ktorými môže pešiak dosiahnuť príslušné pole a toto číslo naň napíšte. Začnite zo štartovnej pozície. Zopár vodiacich otázok:

- Ako sa dostanete do ďalšieho radu?
- Čo robíte s číslami, keď sa posuniete do vyššieho radu?
- Je pre pešiaka rovnako pravdepodobné, že obsadí každé možné pole?

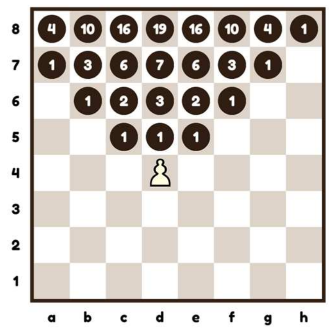
Odpoveď



21 (a) 35 ciest k dosiahnutiu zadného radu



21(b) 27 ciest k dosiahnutiu zadného radu



21(c) 19 ciest k dosiahnutiu d8

25. Ľahký pešiak

Vek 9+	*Logika, informácie, stromové grafy*

Máte osem rovnako vyzerajúcich bielych pešiakov, ale jeden z pešiakov je o trochu ľahší ako ostatní. Rozdiel je príliš malý na posúdenie rukou. Máte imaginárne váhy, na ktoré môžete ľubovoľne umiestniť jedného alebo viacerých pešiakov. Použite na nájdenie ľahkého pešiaka. Koľko vážení potrebujete, aby ste našli ľahkého pešiaka?

Metóda riešenia

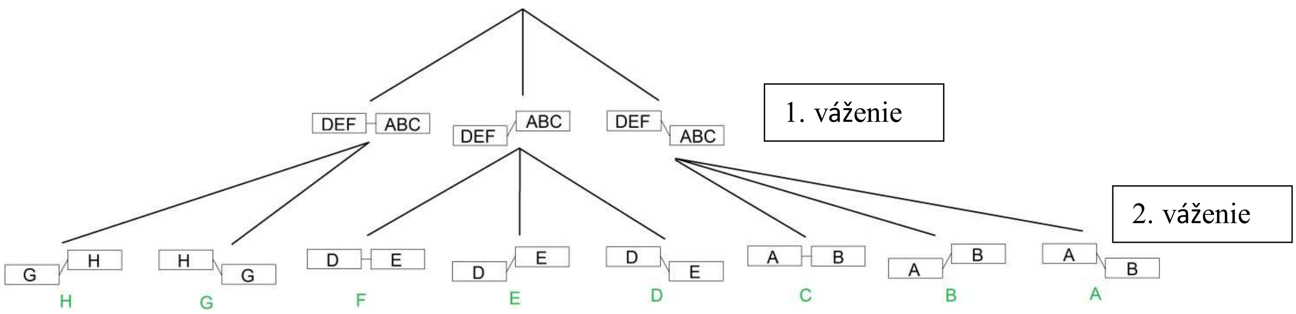
V tomto myšlienkovom experimente, kľúčovou myšlienkou je, že jeden predmet je inej váhy, takže ak odvážite dva predmety, dokážete získať výsledok, teda váhu, tretieho predmetu.

Uvažujte nad ôsmimi pešiakmi označenými A, B, C, D, E, F, G, H.
V prvom vážení zvážte ABC verzus DEF.

Ak je výsledok vyrovnaný, potom viete, že ľahký pešiak je buď G alebo H. V takom prípade, uskutočnite posledné váženie iba s pešiakmi G proti H.

Ak je výsledok nevyrovnaný, pričom ABC je ťažšie ako DEF, potom viete, že ľahký pešiak je buď D, E alebo F. V takom prípade, uskutočnite posledné váženie iba s pešiakmi D proti E (ak je výsledok vyrovnaný, ľahký pešiak je F; ak je D ťažšie ako E, ľahký pešiak je E; ak E je ťažšie ako D, ľahký pešiak je D).
Platí naopak, ak je prvé váženie nevyrovnané, pričom DEF je ťažšie ako ABC.

Pedagogický spôsob postupovania je zostavenie stromového grafu na tabuli:



Žiaci by mali pochopiť, že osem možností (osem pešiakov) sa zhoduje s ôsmimi koncovými uzlami stromu, ktorý popisuje stratégiu.

Odpoveď Sú potrebné iba dve váženia.

Rozšírenie

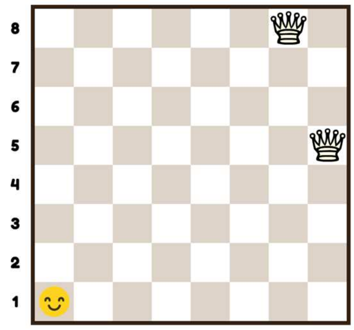
Čo sa stane ak sú pešiaci deviati, jeden z nich o niečo ľahší ako ostatné?

Stratégia stále funguje, s jednou vetvou naviac (pre vyvážené ABC verzus DEF). Existujú tri možné výsledky (ľavá<pravá; ľavá=pravá; ľavá>pravá). Existujú tri spôsoby ako prejsť strom jedným vážením a deväť spôsobov (3x3) ako prejsť strom dvomi váženiami, a tak ďalej. Upozornite, že pri 10 pešiakoch nemôžeme problém vyriešiť iba dvomi váženiami, sú potrebné tri váženia.

26. Hra Wythoff [QQ] Páry

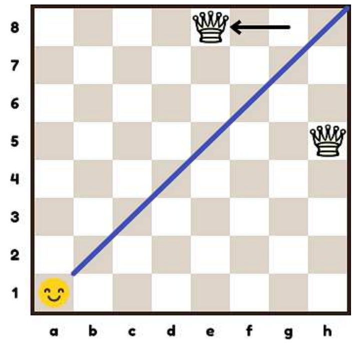
Vek 9+	*Symetria, práca pospiatky od cieľa*

Umiestnite dve dámy rovnakej farby na h5 a g8 na inak prázdnu šachovnicu. Stanovte, že tieto dámy sa môže pohybovať iba na západ, juhozápad, alebo juh. Hráči sa pri ťahu ktoroukoľvek dámou striedajú. Poskytnite žetóny pre umiestnenie na šachovnicu. Hráč, ktorý prvý potiahne kráľovnou na a1 je víťaz.
Kto vyhráva - prvý alebo druhý hráč?



- Pozrite si taktiež cvičenie 13 Hra Wythoff s jednou dámou.
- Najprv by mali deti hru preskúmať samy. Požiadajte ich, aby našli spôsob ako vyhrať. Spýtajte sa ich, či dávajú prednosť byť v tejto hre prvým alebo druhým hráčom.
- Hrajte proti dieťaťu alebo skupine detí ako prvý hráč, používajúc pri tom správnu stratégiu.
- Ak výhernú stratégiu stále nenašli, povedzte im, aby premýšľali o dôležitosti dlhej diagonály a1-h8

Metóda riešenia
Vytvorte symetrické pozície okolo a1-h8 hlavnej diagonály. Potom prvý hráč kopíruje ťahy druhého hráča, stratégia známa ako Tweedledum-Tweedledee.

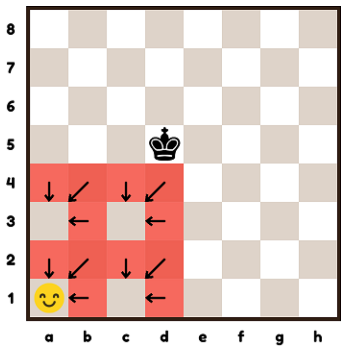


Odpoveď
Prvý hráč môže vyhrať ťahaním dámy na e8.

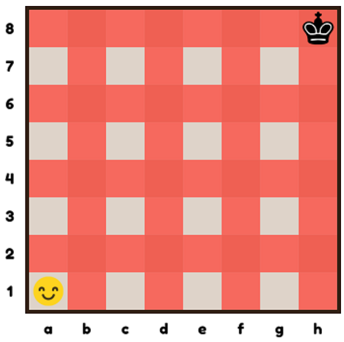
Rozšírenie

Hrajte so samotným kráľom začínajúcim na h8. Ako predtým, prvý hráč, ktorý ťahá kráľa na a1 vyhráva.

Pomôcka: Pracujte spätne od riešenia. Určite polia, na ktorých sa nechcete s kráľom dostať (označené červeným). Výherná stratégia: vyhnite sa červeným poliam.
Prvý hráč môže vyhrať najlepšou hrou: Kráľ na g7, potom kopírovať súperov ťah.



Hra Wythoffov kráľ: Posledné ťahy



Hra Wythoffov kráľ: celý vzorec

27. Hlavolam ukladanie domina Páry

Vek 9+	*Tvary, parita*

Táto hra získava na užitočnosti, ak máme prístup ku 32 kockám domina veľkosti 2x1, ktorá pokryje presne dve polia šachovnice. Môžu to byť aj vystrihnuté karty.

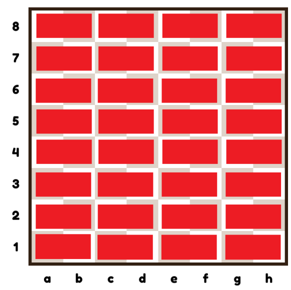
O1: Môžu domino kocky pokryť všetkých 64 polí šachovnice?

O2: Môžu kocky domina pokryť všetkých 62 polí šachovnice, z ktorých sú odstránené protiľahlé rohy?

O3: Môžu kocky domina pokryť všetkých 62 polí šachovnice, z ktorých sú odstránené dve farebné polia?

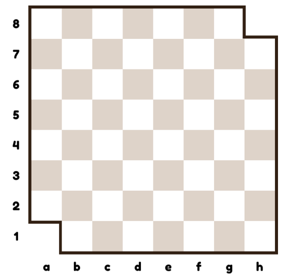
Odpovede

O1 Áno, znázornené na obrázku 28(a).
Existuje veľa spôsobov pokrytia šachovnice.



Obrázok 28(a) Pokrytie šachovnice kockami domina

O2 Nie. Druhá otázka má dômyselné chromatické riešenie. Kocka domina vždy pokryje jedno biele a jedno čierne pole. Takže, skupina domino kociek pokryje rovnaký počet polí každej farby. Poškodená šachovnica (Obrázok 28(b)) má 30 bielych a 32 čiernych polí, takže odpoveď na položenú otázku je negatívna.



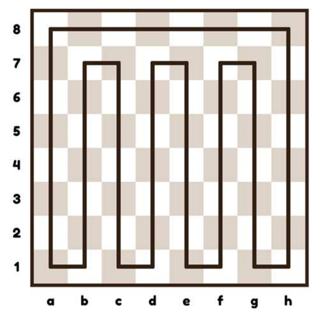
Obrázok 28(b) Poškodená šachovnica

Rozšírenie

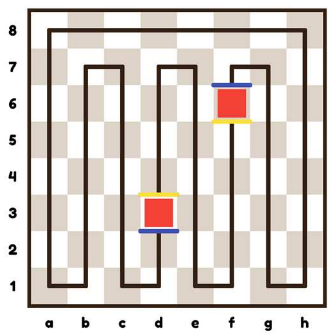
O3: Áno. Predstavme si, že odstránime dve polia odlišných farieb.

Áno. Existuje dômyselné geometrické riešenie. Priamka na obrázku 28(c) prechádza cez všetky polia.

Odstráňte jedno čierne a jedno biele pole. Odstránenie rozdelí priamku na dve časti. Jedna spája žlté strany a ďalšia spája modré strany).



Obrázok 28(c) Súvislá priamka

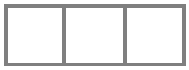


Obrázok 28(d) súvislá priamka v dvoch častiach

Teraz, všetko čo musíme urobiť, je pokryť každú časť kockami domina. To je možné preto, že v každej časti je vyrovnaný počet čiernych a bielych polí. Táto metóda funguje pre akýkoľvek pár odstránených opačne zafarbených polí.

28. Hlavolam ukladanie tromina — Jednotlivci

Vek 9+	Pokus a omyl, symetria, násobky, rozdeľ aby si dobyl



Použite výtlačky prázdnej šachovnice s ceruzkou a 22 kociek tromina.
Tromino kocka má veľkosť 3x1. Každá tromino kocka pokrýva presne tri polia šachovnice. Dokážete pokryť šachovnicu tromino kockami rozmeru 3x1 ak bolo odstránené rohové pole?
Toto cvičenie je jednoduché vysvetliť a môže byť vypracované samostatne. Odložte si ho na „špeciálny deň".

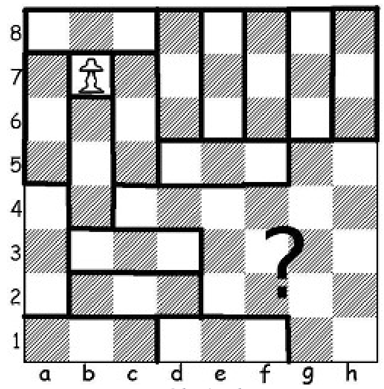
(a) Môžu tromino kocky pokryť všetkých 64 polí šachovnice?
(b) Odstráňte jeden roh šachovnice.
Môžu tromino kocky pokryť všetkých 63 polí zničenej šachovnice?
(c) Existuje ďalšie pole, okrem poľa v rohu, ktoré môžeme odstrániť, aby sa tromino kocky zmestili?

Úvodné otázky

- Môžu tromino kocky pokryť všetkých 64 polí šachovnice?
  Nie, keďže 64 nie je násobkom 3.
- Koľko tromino kociek potrebujete aby ste pokryli 63 polí?
  63 / 3 = 21: 21 tromino kociek pokryje 63 polí.
- Záleží na tom, ktorý roh šachovnice je odstránený?
  Nie, nezáleží na tom z dôvodu symetrie.

Pochopenie problému

- Skúste pokryť šachovnicu, ktorá má odstránený roh tromino kockami. Spravte niekoľko pokusov s rôznym usporiadaním kociek. [Nie je možné úlohu dokončiť.]
- Odstráňte zo šachovnice iné pole (prečiarknite ho na vašom výtlačku) Možno skúste odstrániť pole z dlhej diagonály. Zdá sa, že odstránenie b7 nefunguje, tak ako ukázané na obrázku 29(a).



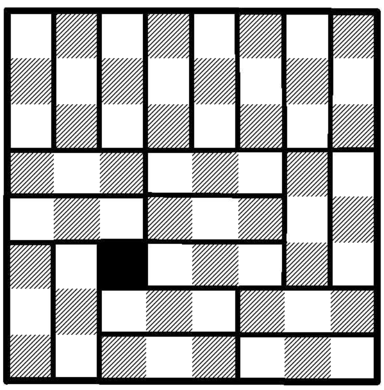
Obrázok 29(a)

Odpoveď

Ak je odstránené c3, c6, f3 alebo f6, pokrývanie môže byť uskutočnené.

Metóda riešenia

S metódou pokusu a omylu deti nájdu jedno zo štyroch symetrických riešení, obrázok 29(b).
Dôkaz je za hranicami úrovne základnej školy.


Obrázok 29(b)

29. Hlavolam dve dámy Štvorice

Vek 9+	Výpočet, metóda pokusu a omylu

Úlohy: Postavte dve dámy na šachovnicu tak, aby napadli:

(a) najvyšší počet polí
(b) najnižší počet polí

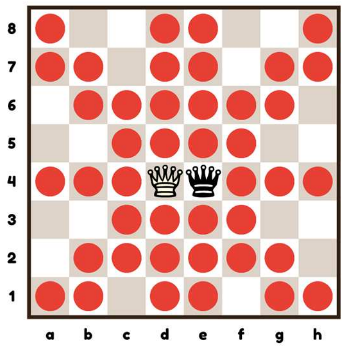
Počítajte iba neobsadené polia. Druhú útok na pole sa nepočíta. Ignorujte farby.

Metóda riešenia

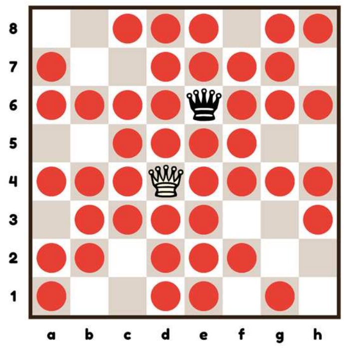
(a) Z kontúry sily vieme, že dáma je najsilnejšie v strede šachovnice. Preto, začnite umiestnením dámy na jednom zo stredových polí (napr. d4). Potom systematicky skúšajte umiestniť druhú dámu tak blízko, ako je možné. Najvyšší počet obsadených polí 42 vznikne tam, kde sú dámy ortogonálne susediace v strede, alebo (ii) sú na vzdialenosť jazdca na voľnej strane prvej dámy (napr. d4 a e6).

(b) Z kontúry sily vieme, že dáma je najslabšia na krajoch šachovnice. Ťahy môžeme obmedziť umiestnením dvoch dám na rovnakú priamku. Ako prvý pokus, umiestnenie dám do rohov (protiľahlých alebo susedných) nám dáva počet 32. Avšak, nižší počet 31 vznikne pri (i) a1 a a3/a5/a7 alebo (ii) b1 a d1/f1/h1 (plus symetrie). Obrázok 30(c) je spojená mapa sily kontúry dvoch dám pre počet ohrozených neobsadených polí s jednou dámou na a1 poskytujúc riešenie Obrázka 30(b)(i).

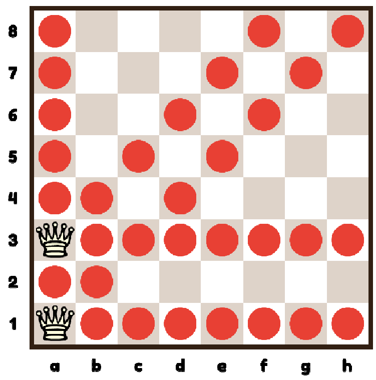
Odpoveď



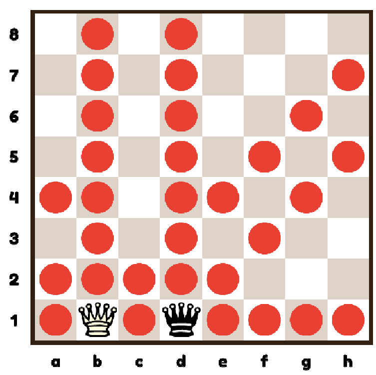
Obrázok 30(a) maximum (i)



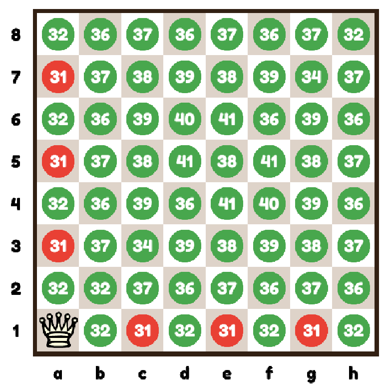
Obrázok 30(a) maximum (ii)



Obrázok 30(b) minimum (i);



Obrázok 30(b) mimimum (ii)



Obrázok 30(c) Spojená kontúra s Da1

30. Rovnako vzdialený mat Páry

Vek 9+	*Geometria, meranie vzdialeností, vzájomné učenie*

Toto je praktické cvičenie s figúrkami a šachovnicou najlepšie riešené v pároch alebo malých skupinách. Keďže pri hraní šachu je nevyhnutné poznať mat, aspoň jeden člen skupiny alebo páru musí poznať pravidlá šachu. Po tomto skúmaní budú všetci vedieť čo je mat!

Úvod

Otázka: Jedna figúrka dáva mat, ale aká je úloha druhej figúrky v mate?
Odpoveď: Druhá figúrka stráži únikové polia, t.j. drží kráľa „vo väzení“.

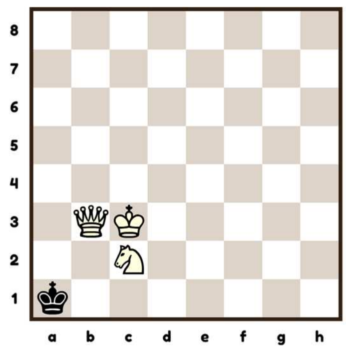
Metóda riešenia

Postavte pozície s dvomi bielymi figúrkami, ktoré sú rovnako vzdialené od poľa a1.
Teraz umiestnite bieleho kráľa na c3 a čierneho kráľa na a1.

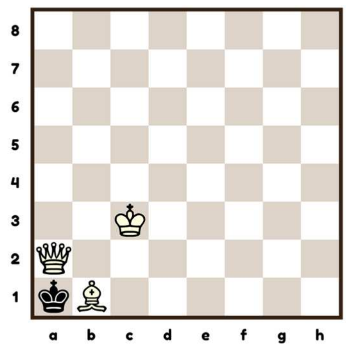
i. Nájdite dve biele figúrky, ktoré dajú mat.
ii. Uistite sa, že tieto dve biele figúrky sú rovnako vzdialené od čierneho kráľa

Odpovede

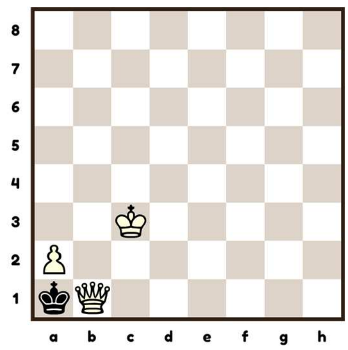
Existuje niekoľko odlišných riešení s dovoleným matom. Na obrázkoch 31(a) a 31(b) sa môže dáma vymeniť s inou figúrkou a stále dá mat. Poznamenajte, že obrázok 31(c) je nesprávne riešenie, pretože dáma môže byť vyhodená. Ani obrázok 31(d) nie je riešenie, pretože pozícia je nedovolená. Čierny kráľ už bol v mate pri predchádzajúcom ťahu.



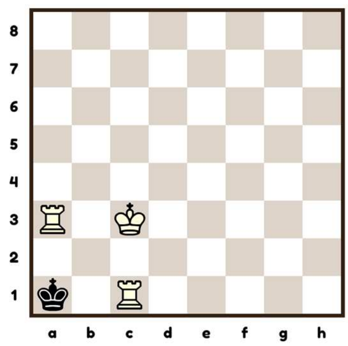
Obrázok 31(a)



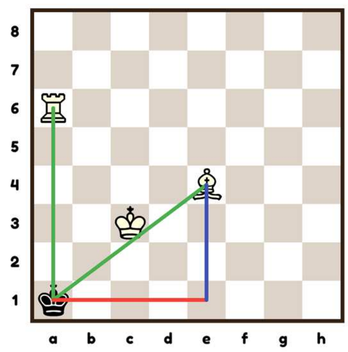
Obrázok 31(b)



Obrázok 31(c) X



Obrázok 31(d) X



Obrázok 31(e)

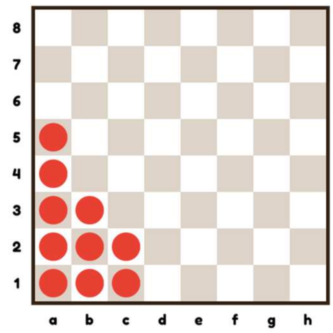
Na obrázku 31(e) sú figúrky vzdialené 5 jednotiek (jednotkou je dĺžka bočnej strany poľa) od čierneho kráľa, presnejšie od stredového bodu a1. Stredové body a1, e1 a e4 tvoria pravouhlý trojuholník. Dve kratšie strany sú dlhé 3 a 4 jednotky a použitím Pytagorovej vety, dĺžka prepony musí byť 5 jednotiek. [Vek 10+]

31. Hra odčítavanie Páry

Vek 9+	Symetria, násobky

Umiestnite 10 žetónov do troch radov. Hráči sa striedajú pri **odstraňovaní 1, 2 alebo 3 žetónov** z konca ľubovoľného radu. Hráč, ktorý odstráni posledný žetón je víťaz.

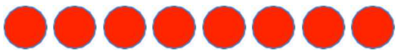
Táto hra súvisí s hrou 3 krát stôl (alebo 4 krát stôl, ak najvyšší počet žetónov, ktoré majú byť odstránené je 4, atď.)



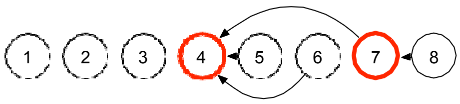
Obrázok 32(a) Hra odčítavanie

Úvodné otázky

Nájdite víťazný ťah v rade veľkosti 8.



Víťazný ťah je odstránenie jedného žetóna.
Vo všeobecnosti, víťazná hra znamená nechať 4, 7, (10) ... Žetónov t.j. Násobok 3 plus 1, čo je o jeden viac ako najvyšší počet žetónov, ktoré môžu byť odstránené. Nakoniec, súper musí nechať 1, 2, alebo 3 žetóny, po ktorých prvý hráč odstraňuje posledný žetón.

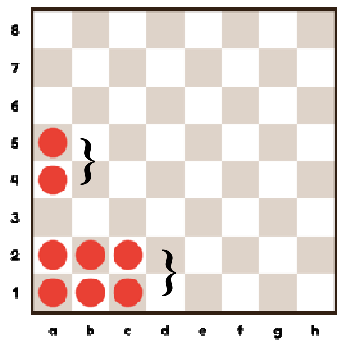


Stratégia hry

Najlepšia stratégia v hrách s posledným výherným ťahom je vytvoriť **nezávislé páry identických komponentov.** Následne, pri každom páre, imitujte ťah vášho súpera, stratégia „Tweedledum and Tweedledee“ (pozri tiež cvičenie 26).

Víťazný plán

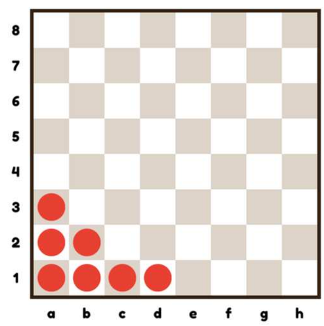
Víťazný ťah je odstránenie tretieho radu.
Na obrázku 32(b) páry identických komponentov sú spolu v zátvorke.
Od tejto pozície opakujte všetko, čo robí súper.



Obrázok 32(c) Páry identických komponentov

Rozšírenie

Zahrajte pozíciu z 32(c).
Víťazný ťah je odstrániť jeden žetón z prvého radu. Metódu riešenia si pozrite v ďalšej úlohe 33 Nim.

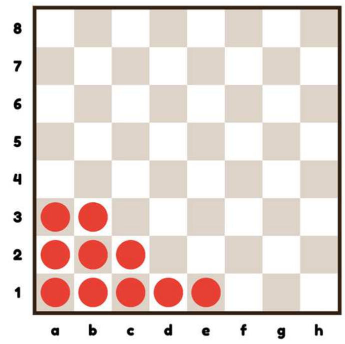


Obrázok 32(c) Rozširujúca úloha

32. Nim Páry

Vek 10+	*Symetria , násobky, sila*

Umiestnite desať žetónov v troch radoch: 5,3,2



Hráči sa striedajú pri **odstraňovaní jedného alebo viacerých žetónov** z konca ľubovoľného radu. Osoba, ktorá odstráni posledný žetón je víťaz.

Kto vyhráva, prvý alebo druhý hráč?

Stratégia hry

Víťazný plán je skúsiť dosiahnuť symetriu a potom kopírovať súperove ťahy. Symetria vznikne, keď existujú páry radov s rovnakým počtom žetónov v každom rade. Keď súper odstráni jeden alebo viac žetónov, vy odstránite rovnaký počet žetónov v ďalšom rade: Tweedledum and Tweedledee.

Víťazný plán

Víťazný ťah pre prvého hráča je odstránenie štyroch žetónov z prvého radu nechajúc {1,3,2}. Čokoľvek urobí váš súper, ďalším ťahom môžete vytvoriť symetriu. Napríklad:

- Váš súper odstráni rad 1 nechajúc {1,3,2}. Pri vašom ťahu, odstráňte jeden žetón z druhého radu, nechajúc {0, 2, 2}. Vzniká symetria a vyhrať môžete tak ako bolo opísané vyššie.
- Váš súper odstráni tretí rad nechajúc {0,3,5}. Pri vašom ťahu, odstráňte dva žetóny z prvého radu, nechajúc {0, 3, 3}. Vzniká symetria a vyhrať môžete tak ako bolo opísané vyššie.

[Vek 11+] Všeobecnejšie, víťazný plán je dosiahnuť symetriu vzhľadom na číslo „sily 2“ (1,2,4,8). Napríklad, rad 7-ich obsahuje tri sily 2: 1, 2 a 4. V štartovnej pozícii, skupiny {5,3,2} sa dajú rozložiť nasledovne:

$$5 = 4 + 0 + 1$$
$$3 = 2 + 1$$
$$2 = 2 + 0$$

Toto nám dáva

Sily 2	1	2	4
Počet týchto	2	2	1

Nachádzajú sa tam dve 1-ky, dve 2-ky a jedna 4-ka.

Odstránením jednej 4-ky nám zostanú tieto spárované sily 2: dve 1-ky a dve 2-ky Takže výherná hra pri prvom ťahu je odstránenie štyroch žetónov z prvého radu.

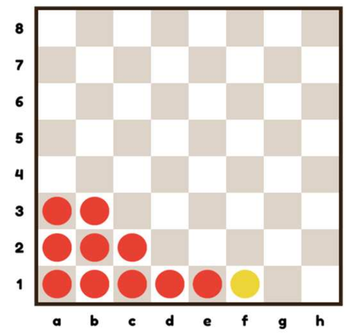
33. Hra Zlatá minca Páry

Vek 10+	*Symetria , násobky, stromové grafy, práca pospiatky*

Umiestnite desať červených žetónov v troch radoch: 5,3,2. Navyše, k týmto žetónom pridajte jeden zlatý žetón do najdlhšieho radu. Viď obrázok 34(a).
Hráči sa striedajú pri odstraňovaní **ľubovoľného počtu** žetónov z akéhokoľvek miesta z ľubovoľného radu. Zlatý žetón musí byť posledný odstránený a nemôže byť odstránený zároveň s červeným žetónom.

Hráč, ktorý odstráni zlatý žetón je víťaz. Kto vyhráva?

Táto hra získava na význame, ak ste predtým hrali hru Odpočítavanie (úloha 32) a Nim (úloha 33).



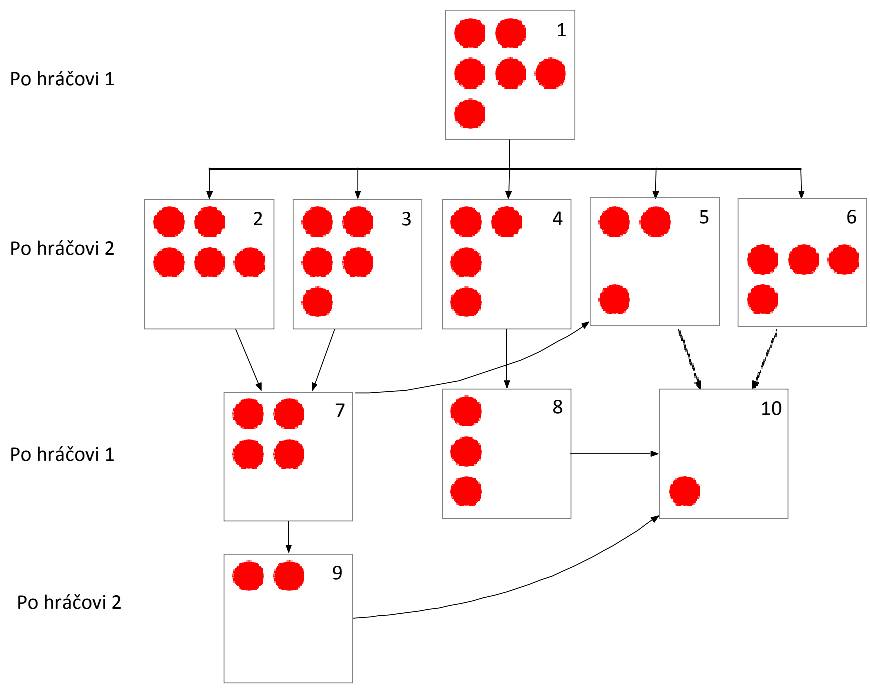
Obrázok 34(a) Hra zlatá minca

Stratégia hry

Bežná stratégia pri hraní hier na odpočítavanie je byť ten, kto odstráni posledný žetón. Zvrat v tejto hre je, že ten, kto odstráni posledný červený žetón je porazený, nie víťaz. Toto je misère verzia hry odpočítavanie. Najlepšia stratégia je postupovať podľa bežnej výhernej stratégie, ako keby sme hru hrali iba s červenými žetónmi. Avšak, tesne pred koncom, nedajte druhej strane na výber a nechajte súpera odstrániť posledný červený žetón.

Víťazný plán

Pre zjednodušenie úlohy, ignorujme zlatý žetón a hrajme, aby sme prehrali hru s červenými žetónmi. Všimnite si, že usporiadanie červených žetónov je rovnaké ako v úlohe 33. Preto, aby sme získali kontrolu nad hrou, prvý hráč by mal odstrániť 4 červené žetóny z prvého radu. Po hre nasleduje stromový graf na obrázku 34(b), ktorý vysvetľuje reakcie Hráča 1 na ťahy Hráča 2. Hráč 1 vyhráva nechaním jednej jednotky (Box 10), ktorá sa dá dosiahnuť rôznymi cestami. Hráč 2 musí zdvihnúť posledný červený žetón, po čom Hráč 1 zdvihne Zlatý žetón. Hráč 1 dosiahne víťaznú pozíciu nechaním buď **dvoch párov** (Box 7) alebo **troch jednotiek** (Box 8).



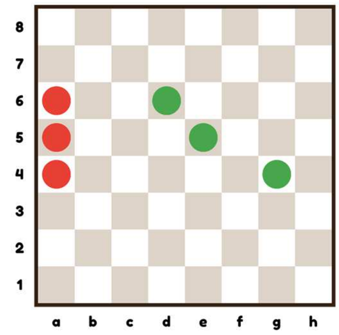
Obrázok 34(b) Stromová hra pre hru Zlatá Minca

34. Hra Northcott Páry

Vek 10+	*Symetria, reprezentácia*

Hráč 1 má žetóny na a4, a5, a4, a5 a a6 a Hráč 2 má žetóny na g4, f5 a e6.

Striedavé ťahanie, každý hráč ťahá jedným zo svojich farebných žetónov v rade ľubovoľný počet ťahov smerom k súperovi. Nie je povolené vyhadzovanie alebo skákanie. Posledná osoba, ktorá ťahá je víťaz. Kto vyhráva?



Hra Northcott

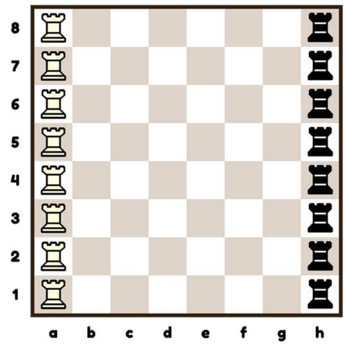
Metóda riešenia

Táto úlohu je ekvivalentom hry Nim (úloha 32), ale s medzerami reprezentujúcimi žetóny. Horizontálna vzdialenosť medzi každým z rozdielne zafarbených žetónov je {2,3,5}. Každým ťahom sa zmenšuje vzdialenosť, ekvivalent k odstraňovaniu žetóna v hre Nim. Stratégia hrania je preto rovnaká ako v hre Nim.

35. Hra Kĺzavé veže — Páry

Vek 10+	Symetria , parita, práca pospiatky

Umiestnite osem bielych veží na ľavú stranu šachovnice a osem čiernych veží na pravú stranu šachovnice (Obrázok 36). Tieto veže sa môžu pohybovať (kĺzať) do strán, nie hore a dole. Biele veže sa môžu pohybovať iba vpravo a čiarne veže sa môžu pohybovať iba vľavo. Vyhadzovanie alebo skákanie cez figúrky nie je dovolené. Posledná osoba, ktorá ťahá je víťaz.
Kto vyhráva?

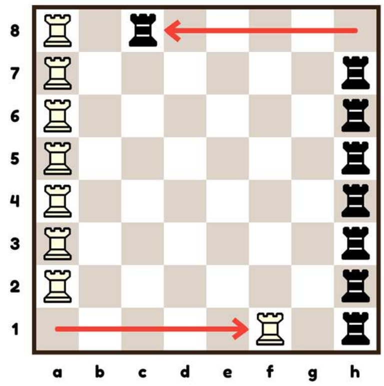


Obrázok 36(a) Hra kĺzavé veže

Metóda hrania

Rady sú jeden od druhého nezávislé, pretože veže sa môžu pohybovať iba horizontálne. Pracujte pospiatky a uvažujte nad jedným radom, potom zoberte do úvahy ďalšie rady. Prvý hráč môže vyhrať prvý rad presunutím veže vedľa súperovej veže. Podobne môže druhý hráč môže vyhrať druhý rad. Ak sú tam iba dva rady, druhý hráč ťahá ako posledný a teda vyhráva hru. Druhý hráč vyhrá postupovaním podľa tejto symetrickej stratégie, pretože sa tam nachádza párny počet radov.

Prvý hráč sa musí pokúsiť a „stratiť ťah", aby dosiahol symetriu. Trikom pre prvého hráča je zviesť druhého hráča, aby nechtiac porušil symetriu. Napríklad, pri prvom ťahu by mohol prvý hráč nechať voľné jedno pole medzi svojou vežou a vežou súpera (napr. ♖a1- f1), zvádzajúc tak druhého hráča, aby uzatvoril medzeru. Avšak, správnou odpoveďou druhého hráča bude zrkadliť ťah v ďalšom rade napr. ♜h8-c8. Pokiaľ je druhý hráč pozorný, mal by vyhrať hru.



Obrázok 36(b) Biely skúša 1. ♖f1, ale Čierny odpovedá 1.. ♜c8

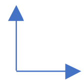
36. Koľko ciest? [veža]

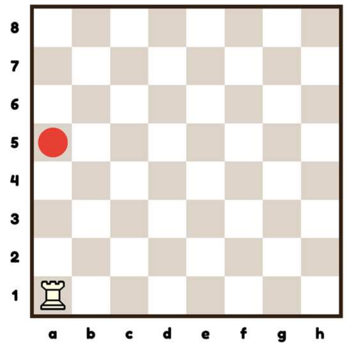
Vek 10+	*Výpočet, Paskalov trojuholník*

Zdroje: Výtlačky týchto pozícií s vežou na a1 a farebne označené cieľové pole.

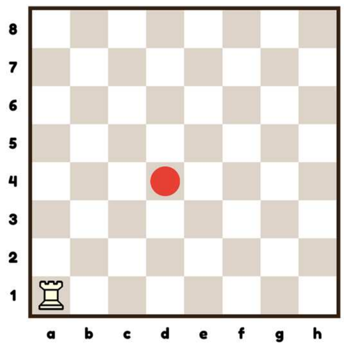
Úloha

Táto veža sa môže pohybovať iba na sever alebo východ, striedajúc smer pri každom ťahu. Vypočítajte koľko rozličných ciest existuje, aby veža dosiahla:

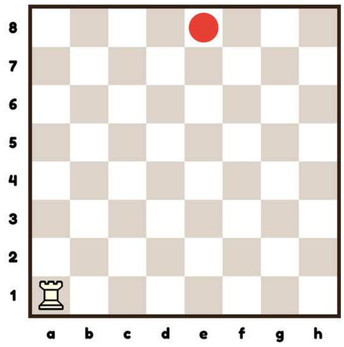




Obrázok 37(a)



Obrázok 37(b)



Obrázok 37(c)

Úvodné otázky

- Prečo si myslíte, že veža sa môže pohybovať iba na sever alebo východ? *Preto, aby sa veža každým ťahom dostala bližšie k cieľovému poľu. Inak by existovalo nespočetné množstvo spôsobov ako sa tam dostať.*
- Prečo je dôležité striedať smer pri každom ťahu? *Hľadáme rozličné cesty, ale ďalšie ťahy tým istým smerom by bola súčasťou tej istej cesty.*

Koľko rozličných ciest môže mať veža z a5 na a1? (Obrázok 37(a)

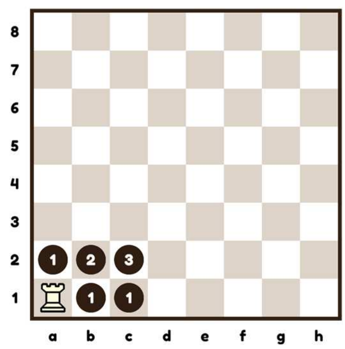
Pretože mení smer pri každom ťahu, existuje iba jedna cesta, jediný ťah z a1 na a5.

Metóda riešenia

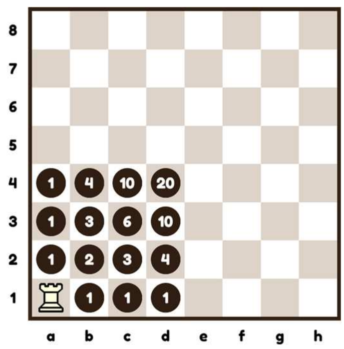
- Začnite zo štartovnej pozície. Pri každej možnej pozícii veže, spočítajte počet spôsobov, ktorými môže dosiahnuť príslušné pole a toto číslo naň napíšte.
- Trik pre vyriešenie: hľadajte susedné polia v smere, z ktorého by veža mohla prísť. Napríklad, aby mohla veža dosiahnuť c2, mohla by prísť cez b2 alebo c1, takže súčet čísel v b2 a c1 dáva výsledný počet ciest na c2; pozrite obrázok 37(b).
- Pokračujte s číslovaním každého poľa, až kým sa nedostanete na cieľové pole.

Odpovede

Existuje 20 ciest na d4, tak ako je znázornené na obrázku 37(e). Existuje 330 spôsobov ako sa dostať na e8.



Obrázok 37(d)



Obrázok 37(e)

37. Cesta vežou na zničenej šachovnici Páry

Vek 10+	Symetria, výpočet

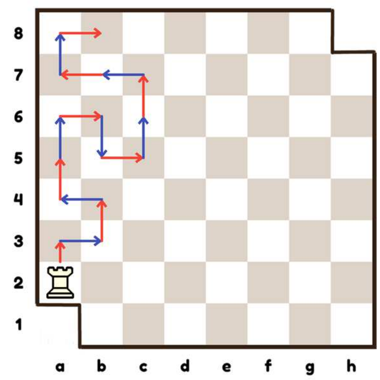
Odstráňte náprotivné rohy šachovnice. Postavte vežu na akékoľvek pole. Môže veža prejsť všetky polia zničenej šachovnice bez toho, aby dvakrát navštívila to isté pole?
Toto je pokročilá verzia úlohy 14, Hlavolam Veža v rohu. Metóda

riešenia

Použite ceruzku, papier a výtlačky šachovnice. Deti by mali najprv preskúmať úlohu samy. Nechajte ich, aby požiadali o objasnenie problému. Očakávať podobné otázky:

- Záleží na tom, kde veža začína?
  Nie, veža môže začať z akéhokoľvek poľa.
- Musí sa veža vrátiť na štartovné pole?
  Nie, veža môže skončiť na ľubovoľnom poli pod podmienkou, že každé pole navštívila aspoň raz, nie viackrát.

Deti nebudú schopné nájsť riešenie. Teraz ich môžete nasmerovať k dôkazu nasledujúcimi pomôckami a otázkami:



- Koľko tmavých a koľko bledých polí musí veža navštíviť?
  30 tmavých a 32 svetlých polí.
- Veža by na svojej ceste mala postupovať jedno-krokovými ťahmi. Použite dve farby, napr. červenú pre nepárne (1., 3., 5., atď.) a modrú pre párne (´2., 4., 6., atď.) ťahy, tak ako znázorňuje diagram.
- Koľko jedno-krokových ťahov bude musieť veža urobiť, aby dokončila cestu?
  61 ťahov.
- Koľko nepárnych a koľko párnych jedno-krokových ťahov bude musieť veža urobiť, aby dokončila cestu?
  31 nepárnych a 30 párnych ťahov.
- Predstavme si, že veža začína na bledom poli, ako a2. Čo môžete povedať o farbe cieľového poľa (kde veža pristane) pri nepárnych a párnych jedno-krokových ťahoch?
  Cieľové pole pri nepárnych ťahoch je vždy tmavé, zatiaľ čo cieľové pole pri párnych ťahoch je vždy bledé.
- Predstavme si, že veža začína na bledom poli, ako a2. Spočítajte tmavé cieľové polia, ktoré sú potrené na dokončenie cesty. Viete vysvetliť prečo nemôže veža dokončiť cestu?
  Cieľové pole pri nepárnych ťahoch je vždy tmavé a tmavých polí je spolu 31. Tým pádom existuje 31 tmavých cieľových polí. Veža nemôže dokončiť svoju cestu, pretože by potrebovala navštíviť iba 30 tmavých polí.
- Predstavme si, že veža začína na tmavom poli, ako b2. Spočítajte bledé cieľové polia, ktoré sú potrené na dokončenie cesty. Viete vysvetliť prečo nemôže veža dokončiť cestu?
  Cieľové pole pri nepárnych ťahoch je vždy bledé a bledých polí je spolu 31. Tým pádom existuje 31 bledých cieľových polí. Veža nemôže dokončiť svoju cestu, pretože by potrebovala navštíviť iba 32 bledých polí.

Odpoveď
Výpočtom sme dospeli k odpovedi nie. Veža nemôže dokončiť svoju cestu na šachovnici.

38. Hlavolam Strelec kľučkuje

Vek 10+	Výpočet, Paskalov trojuholník

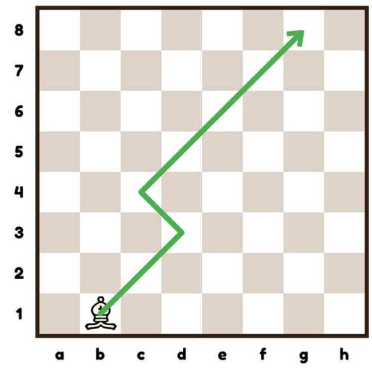


Diagram znázorňuje prejazd strelca šachovnicou.
Pri každom ťahu sa posúva o rad vyššie a strieda smery zo severovýchodu na severozápad a naopak. Použite ceruzku a výtlačky šachovnice.

Otázky:

(a) Koľko ciest z b1 na g8?
(b) Koľko ciest z b1 na druhú stranu šachovnice?
(c) Aký je celkový počet ciest po bielych poliach začínajúcich v prvom rade a končiacich v ôsmom rade?

Tento problém má podobnú metódu riešenia ako úloha 37. Deti, ktoré porozumeli výpočtu ciest pre vežu, budú úspešné pri úlohe so strelcom.

Úvodné otázky

- Prečo si myslíte, že strelec sa pri každom ťahu musí pohnúť vyššie o jeden rad?
  Preto, aby sa každým ťahom dostal bližšie k cieľovému poľu.
- Prečo je dôležité striedať smer pri každom ťahu?
  Hľadáme rozličné cesty, a rovnako ako v úlohe 37, ďalšie ťahy tým istým smerom by boli súčasťou tej istej cesty.

Metóda riešenia

Použite šachovnicu, aby ste našli cesty pre strelca, ktorý sa chce dostať z b1 na g8. Svoje cesty zapíšte. Tu sú dva príklady:

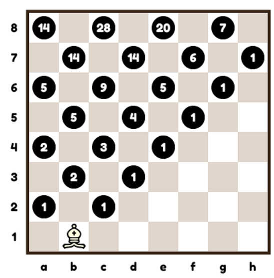
1. cesta: b1→d3→c4→g8
2. cesta: b1→e4→d5→ g8

Koľko rôznych ciest dokážete nájsť? Spolu ich existuje sedem.

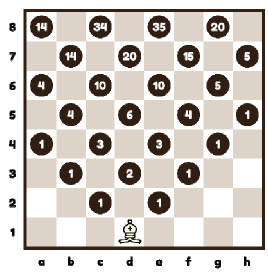
Pri každej možnej pozícii strelca počítajte počet ciest, ktorými môže dosiahnuť príslušné pole a toto číslo naň napíšte. Začnite zo štartovnej pozície.

Odpovede

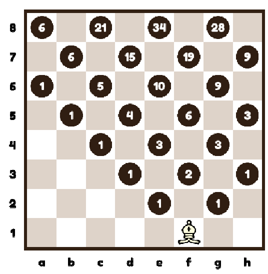
(a) Existuje 7 ciest z b1 na g8.
(b) Existuje 14+28+20+7=69 ciest na druhú stranu; pozrite obrázok 38(a).
(c) Existuje 296 rôznych ciest. Sčítajte všetky čísla v 8. rade obrázkov 38(a), 38(b), 38(c) a 38(d).



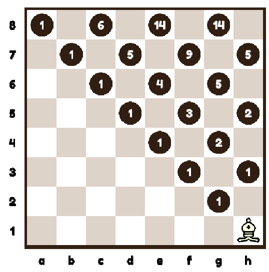
Obrázok 38(a)



Obrázok 38(b)



Obrázok 38(c)



Obrázok 38(d)

39. Hlavolam päť dám Štvorice

Vek 10+	Výpočet, Paskalov trojuholník

Úloha

Usporiadajte päť dám tak, aby napádali každé pole na šachovnici aspoň raz.
Útoky musia zahŕňať všetky obsadené polia. O figúrkach, ktoré napádajú neobsadené polia hovoríme, že ovládajú šachovnicu. Na ovládnutie šachovnice je potrebných minimálne päť dám.

Úvodné otázky

Koľko polí môže dáma napadnúť?
Poznamenajte, že dáma nenapadá pole, na ktorom stojí.
21, 23, 25 alebo 27 v závislosti od jej pozície. Pozrite si kontúru dámy v otázke 40.

Metóda riešenia

Umiestnite na šachovnicu päť dám.

Označte žetónom každé pole, ktoré je napádané jednou alebo viacerými dámami. Koľko voľných (neobsadených a nenapadnutých) polí môžete napočítať?

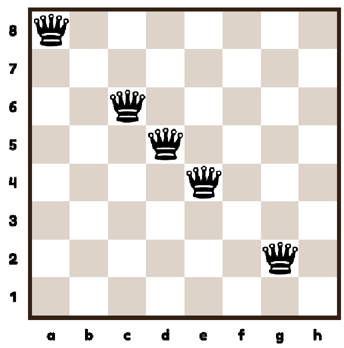
Skúste zmenšiť počet voľných polí presunutím dámy na iné pole.
Dokážete zmenšiť počet voľných polí na nulu? Ak áno, tak ste vyriešili úlohu.

Odpovede

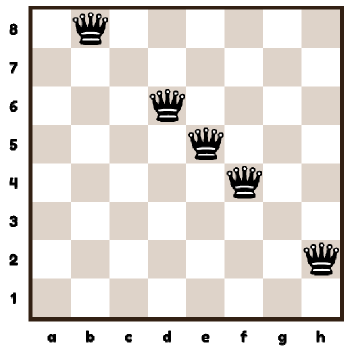
Existuje presne 4860 rozličných spôsobov splnenia tejto úlohy. Pozrime sa na pár zaujímavých usporiadaní:

Obrázok 42(a) Všetky dámy sú umiestnené na dlhej diagonále
Obrázok 42(b) Všetky dámy sú umiestnené na diagonále, ktorá nie je dlhá
Obrázok 42(c) Všetky dámy sú umiestnené pozdĺž jedného stĺpca šachovnice
Obrázok 42(d) Žiadna dáma nenapáda inú

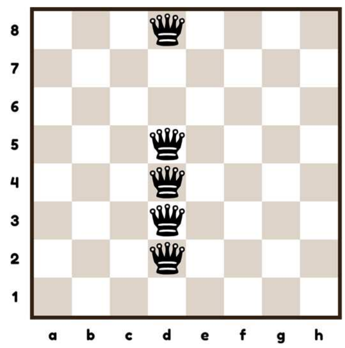
Poznamenajte, že v (a) - (c) útoky zahŕňajú aj všetky obsadené polia.



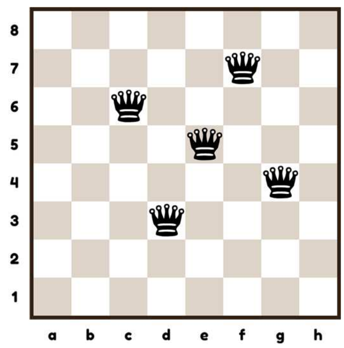
Obrázok 42(a)



Obrázok 42(b)



Obrázok 42(c)



Obrázok 42(d)

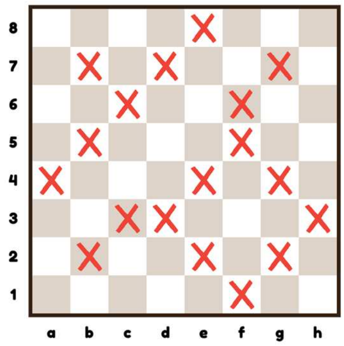
40. Rozdelenie šachovnice Jednotlivec

Vek 10+	Rozklad plochy na štvorce, pokus a omyl

Vytlačte šachovnicu označenú krížikmi tak ako na obrázku 40(a).

Úloha

Rozdeľte šachovnicu na osem malých štvorcov tak, aby každý obsahoval aspoň jeden krížik. Všetky nakreslené štvorce nemusia byť rovnakej veľkosti.



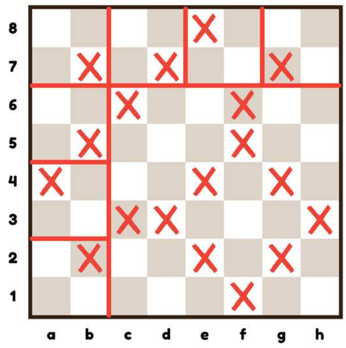
Obrázok 40(a) Rozdeľte šachovnicu

Metóda riešenia

Skúste polia inej veľkosti ako 2x2. Je tu niekoľko možných polí, ktoré obsahujú jeden krížik. Začnite z rohu šachovnice a potom postupujte systematicky dole a naprieč.

Odpoveď

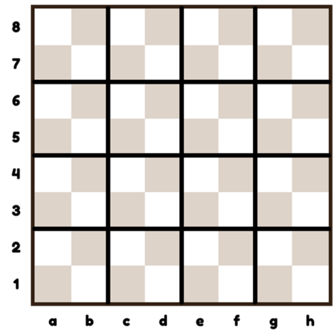
Obrázok 40(b) znázorňuje riešenie.



Obrázok 40(b) Šachovnica rozdelená na štvorce

41. Ukladanie šachovnice Štvorice

Vek 10+	*Rozklad plochy na štvorce, výpočet, pokus a omyl, meranie plochy, druhé mocniny čísel*



Ukážte šachovnicu rozdelenú na 16 štvorcov.
Rozdajte výtlačky prázdnej šachovnice.

Úloha: Ukážte ďalšie dva spôsoby rozdelenia šachovnice na 16 štvorcov.

Úvodné otázky

1. Jedno pole šachovnice má rozlohu 1 jednotku.
   Aká je rozloha šachovnice?
   64 jednotiek.
2. Polia sú nakreslené na šachovnici. Napíšte zoznam týchto polí.
   Aké meno dávame týmto poliam?
   1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 a 64. Toto sú čísla polí.

Pochopenie problému

1. Obložte šachovnicu poľami. Skúste použiť veľa rozličných veľkostí polí.
   Spočítajte počet štvorcov, ktoré ste použili.
2. Skúste použiť 16 polí na uloženie šachovnice. Nájdite tak veľa rozličných riešení ako dokážete.

Metóda riešenia

Znovu usporiadanie tej istej súpravy polí nepredstavuje novú odpoveď. Úloha môže byť dokončená ôsmimi rôznymi spôsobmi. Učiteľ môže dávať pomôcky, aby nasmeroval deti k riešeniu.

1. Všetky polia sú rovnakej veľkosti: Obrázok 41(a)
2. Je tam štvorec 7x7: Obrázok 41(b)
3. Použite štvorec 5x5 a tri štvorce 3x3: Obrázok 41(c)
4. Použite tri štvorce 4x4: Obrázok 41(d)
5. Sú tam dva štvorce 4x4 a šesť štvorcov 2x2: Obrázok 41(e)
6. Je tam štvorec 4x4 a štyri štvorce veľkosti jednotky: Obrázok 41(f)
7. Použite štvorec 4x4 a rovnaký počet štvorcov 3x3 a 2x2: Obrázok 41(g)
8. V tomto riešení je osem štvorcov 2x2: Obrázok 41(h)

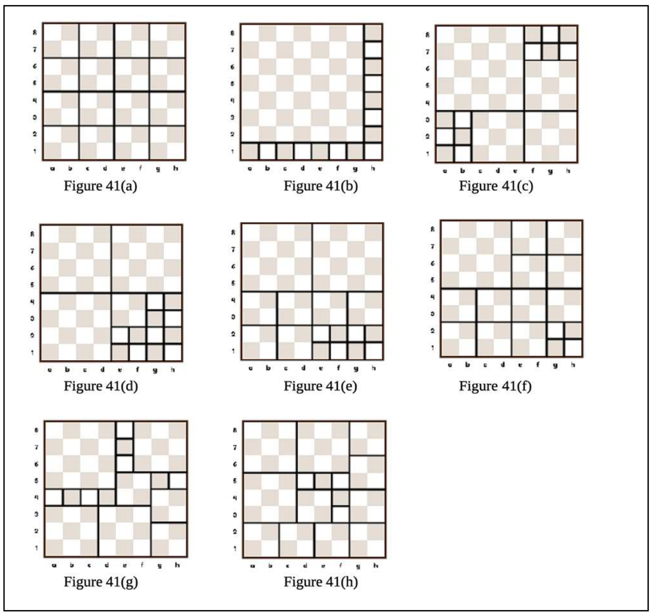


Figure 41(a) Figure 41(b) Figure 41(c)
Figure 41(d) Figure 41(e) Figure 41(f)
Figure 41(g) Figure 41(h)

42. Problém dvanástich jazdcov **Páry**

Vek 10+	*Výpočet, pokus a omyl*

Úloha

Umiestnite na šachovnicu dvanásť jazdcov tak,aby bolo každé pole napadnuté alebo obsadené. Ak nemáte dosť jazdcov, použite namiesto nich žetóny.

Úvodná otázka

Koľko polí môže jazdec napadnúť?

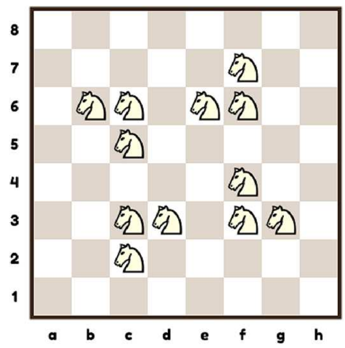
2, 3, 4, 6 alebo 8 v závislosti od jeho pozície. Pozrite si kontúru jazdca v úlohe 10.

Metóda riešenia

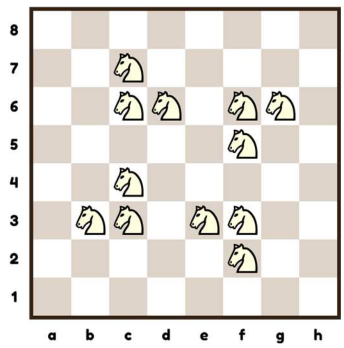
1. Dajte na šachovnicu dvanásť jazdcov. Označte každé pole, ktoré je napádané (jedným alebo viacerými jazdcami). Koľko voľných (neobsadených a nenapadnutých) polí môžete napočítať?
   a) Skúste zmenšiť počet voľných polí presunutím strelca na iné pole.
   b) Dokážete ďalej zmenšiť počet voľných polí?
2. Umiestnite troch jazdcov na b6, c6 a c5. Označte žetónom každé pole, ktoré je napádané jedným alebo viacerými jazdcami. Teraz je jedna štvrtina šachovnice takmer úplne pokrytá jazdcami a žetónmi. Skúste použiť toto rozostavenie jazdcov na pokrytie zvyšku šachovnice.

Odpovede

Ak je každé pole obsadené alebo napadnuté jazdcami, potom hovoríme, že jazdci ovládajú šachovnicu. Dve riešenia sú ukázané na obrázkoch 39(a) a 39(b).



Obrázok 39(a)



Obrázok 39(b)

Poznamenajte, že ak budeme zrkadliť buď riešenie okolo horizontálnej alebo vertikálnej stredovej osi, alebo pozdĺž hlavných diagonál, potom dostaneme ďalší výsledok. Taktiež diagramy majú stredovú súmernosť (t.z. Vyzerajú rovnako keď ich otočíme o štvrť otáčky).

43. Hlavolam osem dám Skupiny

Vek 10+	*Výpočet, pokus a omyl*

Úloha: Znovu usporiadajte dámy tak, aby žiadna dáma nenapádala inú. Nápomocné môže byť označenie napadnutých polí žetónmi.

Toto je najstarší a najznámejší šachový & matematický problém. Figúrky, ktoré nenapádajú jeden druhého sa nazývajú nezávislé.

Metóda riešenia

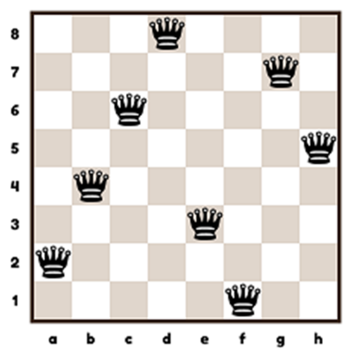
- Dajte na šachovnicu dve dámy, ktoré sa navzájom nenapádajú napr. na ťah jazdca od seba
- Pridajte ďalšiu dámu tak, aby žiadna dáma nenapádala inú
- Pridajte ďalšiu dámu. Skontrolujte, že stále žiadna z dám nie je napadnutá. Postupne zvyšujte počet dám o jednu. Dokážete sa dostať na osem dám?

Na túto úlohu neexistuje žiadny vzorec. Počítačoví odborníci používajú metódu nazývanú „backtracking“ (návrat rovnakou cestou): vždy keď nájdete konflikt, vráťte sa rovnakou cestou na posledné umiestnenie a vyskúšajte ďalšie pole.

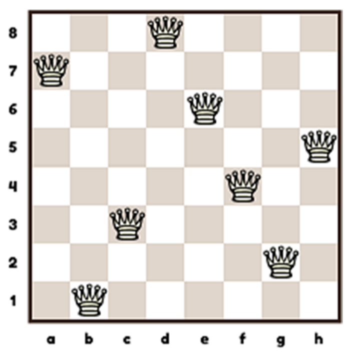
V zjednodušenej verzii tejto hry chýba v riešení jedna, dve alebo tri dámy a úlohou je umiestniť zvyšné dámy na správne polia.
Najlepšie urobiť na papier s pripravenými diagramami.

Odpovede

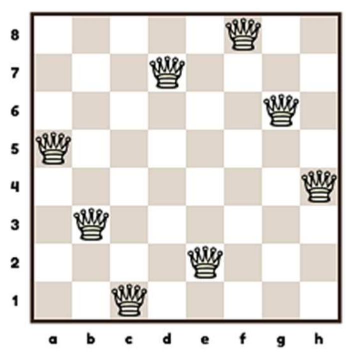
Spolu existuje 92 pozícií, ktoré spĺňajú požiadavky. Ak vynecháme všetky otáčky a zrkadlenia, potom je ich iba 12. Niektoré z nich sú znázornené nižšie:



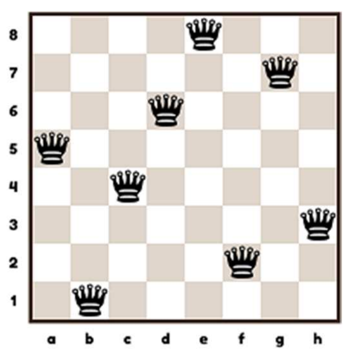
Obrázok 43(a) Riešenie štyri v rade



Obrázok 43(b) Ďalšie štyri v rade



obrázok 43(c) Jediné súmerné riešenie



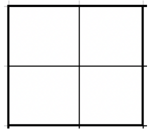
Obrázok 43(d)

44. Koľko štvorcov na šachovnici? Jednotlivci

Vek 10+	*Výpočet, tvary, aritmetika, práca s informáciami v tabuľke*

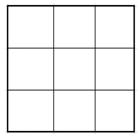
Úloha 1: Koľko štvorcov všetkých veľkostí môžete nájsť v tejto mriežke?

Veľkosť poľa	Počet polí
1 krát 1	4
2 krát 2	1
Celkom	5



Úloha 2: Koľko štvorcov všetkých veľkostí môžete nájsť v tejto mriežke?

Veľkosť poľa	Počet polí
1 krát 1	9
2 krát 2	$\square$
3 krát 3	1
Celkom	14



Metóda riešenia

Začnite od malej mriežky a krok za krokom zväčšujte veľkosť poľa.

Úloha 3: Koľko štvorcov všetkých veľkostí môžete nájsť v mriežke 4x4?

Úloha 4: Koľko štvorcov všetkých veľkostí môžete nájsť na šachovnici? Dokončite mriežku.

	Počet polí								
Veľkosť mriežky	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8	Celkom
1x1	1								1
2x2	4	1							5
3x3	9	4	1						14
4x4	16	9	4	1					30
5x5	25	16	9	4	1				55
6x6	36	25	16	9	4	1			91
7x7	49	36	25	16	9	4	1		140
8x8	64	49	36	25	16	9	4	1	204

V určitom bode si môžeme všimnúť vzor.
Celkový počet geometrických štvorcov na šachovnici je $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$

Odpovede

1) 5
2) Chýbajúce číslo je 4
3) 30
4) 204

45. Hlavolam bodovanie turnaja Štvorice

Vek 10+	Logika, práca s informáciami v tabuľke

Bodovací systém pre školský turnaj je:

Výhra = 3 body Remíza = 2 body Prehra = 1 bod

Štyri deti (Albert, Bridget, Cecília a Dirk) spolu hrajú v turnaji každý s každým. Viete, že:

1) Bridget bola víťazka
2) Dirk skončil posledný
3) Cecília vyhrala, remizovala a prehrala
4) Všetci získali rozdielny počet bodov. Koľko bodov

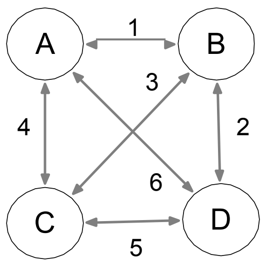
získal Albert?

Úvodné otázka (relevantnosť tejto otázky bude zjavná neskôr)
Rozdeľte 10 žetónov do troch polí tak, že na jednom poli bude minimum=2 a maximum=4 žetóny.
4,4,2; 4,3,3 nepočítajúc obmenu poradia

Metóda riešenia

Existujú komplikované riešenia, ktoré prechádzajú všetkými výsledkami hry. Cestu si môžeme skrátiť preskúmaním dôsledkov podmienky (4), že každý hráč získal rozdielny počet bodov.

Potvrďte, že pri štyroch hráčoch v turnaji každý s každým je 6 hier (viď diagram).
Ukážte, že výsledok každej hry sú 4 body, celkovo 24 bodov v turnaji. (24 je nemenné.) Chceme rozdeliť 24 bodov medzi 4 hráčov s najmenej 3 a maximálne 9 bodmi.
Kombinácie s jedinečným počítaním bodov sú:



Víťaz	Druhý	Tretí	Posledný	Celkom
9	8	4	3	24
8	7	6	3	24
8	7	5	4	24

Iba jedna z týchto kombinácií má 6 bodov. To nám dáva výslednú bodovú tabuľku.

	Hrali	Body	Výsledky	
Bridget	3	8	WWD	3+3+2
Albert	3	7	WWL	3+3+1
Cecília	3	6	WDL	3+2+1
Dirk	3	3	LLL	1+1+1

Príslušná tabuľka turnaja každý s každým je

	Bridget	Albert	Cecília
Albert	Albert = Bridget		
Cecília	Bridget výhra	Cecilia = Albert	
Dirk	Bridget výhra	Albert výhra	Cecília výhra

Odpoveď

Albert získal 7 bodov.

46. Náhodný skok kráľom Páry

Vek 10+	Výpočet, pokus a omyl, symetria

Každé pole na šachovnici je obsadené kráľom. Každý kráľ sa pohybuje náhodne na susedné pole. Predpokladajme, že na každom poli môže stáť viac ako jeden kráľ.
Aký najvyšší počet prázdnych polí by nám mohol zostať?

Pomôcka: použite žetóny, ktoré majú odlišne sfarbené strany. Takto zaistíte, že všetky skoky budú ´zaznamenané´: keď kráľ skočí, žetón sa otočí a položí na pole, kde kráľ prišiel. Staršie deti môžu pracovať aj na papieri s výtlačkami prázdnych šachovníc.

Úvodné otázky

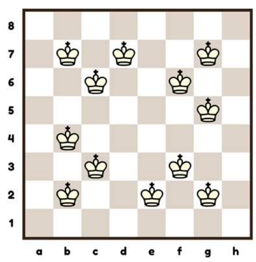
- Aký je najvyšší počet kráľov, ktorý môžu skončiť na tom istom poli?
  Pole môže byť obklopené maximálne ôsmymi poliami, ale prítomný kráľ musí z tohto poľa skočiť preč, takže odpoveď je 8.
- Je možné, že sú po skokoch obsadené všetky polia?
  Áno, je. Napríklad ak si susediaci králi v tom istom stĺpci vymenia miesta.
- Je možné, že máme po skokoch izolovaného kráľa? Izolovaný kráľ nemá žiadnych susedov na susedných poliach.
  Nie, nie je to možné. Ak by existoval izolovaný kráľ, potom kráľ, ktorý pôvodne stál na tom poli, by nemal kam skočiť.

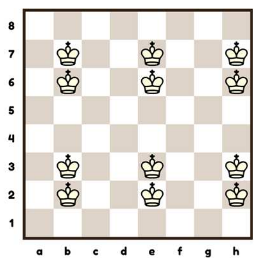
Metóda riešenia

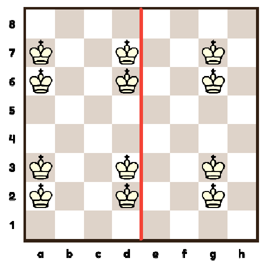
1. Na všetky polia šachovnice umiestnite žetóny rovnakou farbou nahor. Prinúťte každého kráľa skočiť na susedné pole posunutím každého žetónu na susedné pole a ich prevrátením v rovnakom čase. Keď už všetci králi skočili, spočítajte voľné polia na šachovnici.
2. Zopakujte 1. a pokúste sa zvýšiť počet neobsadených polí.

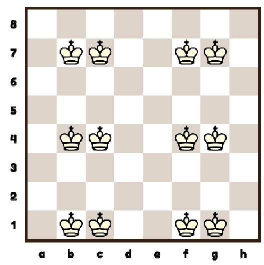
Odpoveď

Po preskúmaní problému môžu prísť deti k správnemu záveru, že najviac 52 polí môže zostať prázdnych, takže králi sa môžu zhromaždiť na 12 poliach. Pozrite 46(a) a 46(b).


Obrázok 46(a)


Obrázok 46(b)


Obrázok 46(c)


Obrázok 46(d)

Rozšírenie

Požiadajte triedu, aby zozbierali tak veľa možných odpovedí s 52 neobsadenými poliami, ako budú môcť. Hovorte o tom, ako sú niektoré z týchto polí symetricky spojené jedno s druhým. Napríklad, obrázok 46(c) je zrkadlením obrázku 46(b) okolo vertikálnej osi súmernosti šachovnice, a obrázok 46(d) je o 90 stupňov v smere hodinových ručičiek otočeným obrázok 46(b).

Niektoré riešenia majú svoju vlastnú symetriu: Obrázok 46(a) má stredovú súmernosť, zatiaľ čo obrázok 46(b) má osovú súmernosť s horizontálnou stredovou súmernosťou šachovnice ako zrkadlová priamka. Farbu polí neberte do úvahy.

47. Náhodná prechádzka kráľom Páry

Vek 11+	Výpočet, pomer, práca s informáciami v tabuľke

Kráľ sa pohybuje náhodne začínajúc na a8. Aká je pravdepodobnosť, že sa kráľ vráti na a8 po:

(a) Dvoch ťahoch?
(b) Troch ťahoch?

Úvodné otázky

- Na koľko polí môže kráľ ťahať z a8?
  3: a7, b7 a b8
- Na koľko polí môže kráľ ťahať z a7(a b8 symetricky)?
  5: b6, b7, b8 a a8
- Na koľko polí môže kráľ ťahať z b7?
  8: a8, a7, a6, b6, c6, c7, c8 a b8

Metóda riešenia

(a) Doplňte túto tabuľku, aby ste objasnili všetky možnosti:

Najprv ťahajte na	Počet možných ťahov odtiaľ	Počet ťahov, keď sa kráľ vráti na a8
a7	5	1
b7	8	1
b8	5	1
CELKOM:	**18**	**3**

Kráľ sa vráti na a8 tri krát z 18, t.z. V priemere 1 zo 6 (16,7%).

(b) Zbierajte informácie o prechádzke jeho veličenstva vo väčšej tabuľke:

Najprv 2 ťahy	Počet možných ťahov odtiaľ	Počet ťahov, keď sa kráľ vráti na a8
a7, a8	3	0
a7, b8	5	1
a7, b7	8	1
a7, b6	8	0
a7, a6	5	0
b7, a8	3	0
b7, b8	5	1
b7, c8	5	0
b7, c7	8	0
b7, c6	8	0
b7, b6	8	0
b7, a6	5	0
b7, a7	5	1
b8, a8	3	0
b8, a7	5	1
b8, b7	8	1
b8, c7	8	0
b8, c8	5	0
CELKOM:	**105**	**6**

Kráľ sa vráti na a8 šesť krát zo 105, t.z. v priemere 2 z 35 krát (5,7%).

48. Vynájdenie šachu Skupiny

Vek 11+	*Exponenciálny rast, geometrická postupnosť*

Existuje legenda o vynájdení šachu. Takáto je jej moderná verzia. Keď ukázal vynálezca Perzskému kráľovi jeho novú hru, Shah bol veľmi ohromený a dal mu na výber jednu z dvoch odmien. Vynálezca mohol dostať 1 milión eur za každé pole na šachovnici, t.z. 64 miliónov eur alebo mohol dostať 1 cent za prvé pole, 2 centy za druhé pole, 4 centy za tretie pole, vždy dvojnásobok až po 64. pole. Ktorú možnosť by ste si vybrali?

Pokus v malom rozsahu

Aby ste pochopili dilemu vynálezca, použite zmenšenú šachovnicu (4x4). Naplňte všetky polia šachovnice zrnkami ryže. Deti môžu prostredníctvom tohto jednoduchého postupu «cítiť» rapídny nárast. Miera nárastu sa zrýchľuje s počtom zrniek ryže, ktoré dostaneme - ilustrácia exponenciálneho rastu. So štandardnou šachovnicou 8x8 dospeje k tomu istému, je to ale nemožné manuálne zvládnuť.

Pokročilá otázka

Čo je väčšie:

a) Celkový počet zrniek ryže v poliach 1-8
b) Celkový počet zrniek ryže v poli 9

Odpoveď: b)
Zopakujte otázku pre porovnanie {1-16 verzus 17} a {1-32 verzus 33} s rovnakou odpoveďou.

Metóda riešenia

Táto úloha zahŕňa veľa zdĺhavého počítania. Aby sme ušetrili čas a dosiahli presnosť, mali by sme použiť kalkulačku alebo tabuľkový kalkulátor. Vzorec pre počet zrniek ryže pre n polí je $2^n – 1$. Vynásobte 2 rovnakým číslom, podľa požadovaného počtu polí a odpočítajte 1.
Aby ste premenili centy na eurá, vydeľte 100.

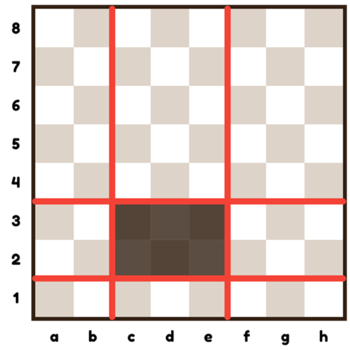
Odpoveď
Možnosť zdvojnásobenia nám dáva oveľa vyššie číslo. Hoci začíname pomaly, keď bude pokrytá polovica šachovnice, situácia sa dramaticky zmení. Keď prídeme k poľu 33, výsledok zdvojnásobenia dosiahol takmer
43 miliónov eur prevýšiac tak prvú možnosť 33 miliónov eur. Vyplnenie celej šachovnice by stálo viac ako všetky peniaze sveta.

49. Koľko obdĺžnikov na šachovnici? Páry

Vek 11+	*Exponenciálny rast, tvary, práca s informáciami v tabuľke*

Toto je náročná úloha pre študentov základných škôl, najlepšie vykonaná ako učiteľom vedená aktivita. Najprv ukážte túto tabuľku bez čísel v druhom stĺpci.

Obdĺžnikový tvar	**Počet tohto obdĺžnika na**	
1x1	8x8	= 64
1x2	7x8x2	= 112
1x3	6x8x2	= 96
1x4	5x8x2	= 80
1x5	4x8x2	= 64
1x6	3x8x2	= 48
1x7	2x8x2	= 32
1x8	1x8x2	= 16
2x2	7x7	= 49
2x3	6x7x2	= 84
2x4	5x7x2	= 70
2x5	4x7x2	= 56
2x6	3x7x2	= 42
2x7	2x7x2	= 28
2x8	1x7x2	= 14
3x3	6x6	= 36
3x4	5x6x2	= 60
3x5	4x6x2	= 48
3x6	3x6x2	= 36
3x7	2x6x2	= 24
3x8	1x6x2	= 12
4x4	5x5	= 25
4x5	4x5x2	= 40
4x6	3x5x2	= 30
4x7	2x5x2	= 20
4x8	1x5x2	= 10
5x5	4x4	= 16
5x6	3x4x2	= 24
5x7	2x4x2	= 16
5x8	1x4x2	= 8
6x6	3x3	= 9
6x7	2x3x2	= 12
6x8	1x3x2	= 6
7x7	2x2	= 4
7x8	1x2x2	= 4
8x8	1x1	= 1
Celkom:		**1296**



Obrázok 49(a)

Metóda riešenia

Požiadajte páry detí, aby z papiera vystrihli jeden alebo viac typov obdĺžnika. Ich úlohou je umiestniť ich na šachovnicu toľkými rôznymi spôsobmi ako bude možné a zaznamenať ich výsledky. Povzbuďte ich, aby našli systematický spôsob počítania.

Dávajte pozor na nástrahy ako počítanie **axb** ale nie **bxa** obdĺžnikov. Zozbierajte všetky odpovede a opravte ich, ak bude potrebné.

Celkový počet obdĺžnikov, ktorý môže byť na šachovnici nájdený je 1296.

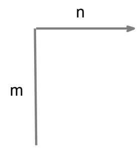
Pokročilá metóda riešenia: Obdĺžnik je ohraničený dvomi vertikálnymi a dvomi horizontálnymi priamkami ako ukazuje obrázok 49(a). Každý obdĺžnik je jedinečne určený vertikálnym a horizontálnym párom priamok. Je tu rovnako veľa horizontálnych párov ako vertikálnych, takže stačí spočítať celkový počet vertikálnych párov, ktorý môže byť nakreslený.

Existuje 9 spôsobov výberu prvej vertikálnej priamky a 8 spôsobov výberu druhej. Každý pár sme rátali dva krát, takže počet vertikálnych párov je 9x8/2 = 36. Takisto tu je 36 horizontálnych párov. Pre každý vertikálny pár môžeme vybrať hociktorý z 36 horizontálnych párov, takže existuje 36x36 možností, spolu dávajúc 1296 obdĺžnikov.

50. Problém skokana Páry

Vek 11+	Výpočet, symetria, uhly

Skokani sú figúrky, ktoré ťahajú m polí jedným smerom a potom n polí v prqvom uhle. Jediný skokan používaný v šachu je jazdec, ktorý je (2,1) skokan.



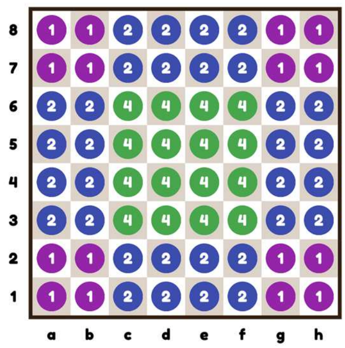
Úlohy

(a) Vytvorte kontúru sily pre každého nižšie uvedeného skokana:

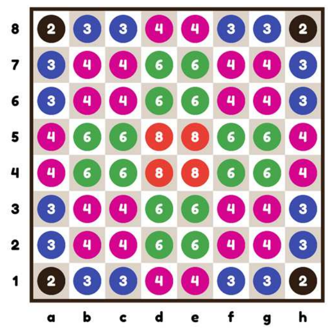
(2,1) Jazdec
(2,2) Strelec
(3,1) Ťava
(3,2) Zebra [dobrovoľné]
(3,3) Výletník [dobrovoľné]
(4,1) Žirafa [dobrovoľné]

Pomôcka: Pozrite si pár príkladov kontúr sily figúrky (úloha 10).

(b) Určite skokanov definovaných mapami kontúr nižšie



50(a)



50(b)

Metóda riešenia

Zrakom skontrolujte diagramy nakreslené v (a) s kontúrami danými v (b).

Riešenie

(a) Strelec (2,2)
(b) Ťava (3,1)